KINH NGHIỆM ÔN THI THPT QUỐC GIA VÀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

MÔN TOÁN

Biên soạn bởi: NGUYỄN LÊ ĐỨC TRỌNG,
(Cựu học sinh trường THPT Chuyên Thủ Khoa Nghĩa,
Niên khoá: 2013-2016)

2016

Chào mọi người!

Tôi là một cựu học sinh của trường THPT Chuyên Thủ Khoa Nghĩa, niên khoá 2013-2016 và vừa trải qua kì thi THPT Quốc gia năm 2016. Trong quá trình ôn luyện thi môn Toán, tôi có một số kinh nghiệm đúc kết cho bản thân thông qua việc làm bài tập, đặc biệt là trong các dạng bài tập phân loại như hình học giải tích phẳng Oxy, phương trình, hệ phương trình, bất phương trình. Riêng phần bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tôi sẽ hoàn thành nếu còn thời gian. Bây giờ, tôi thực hiện bài viết này nhằm chia sẻ với các bạn điều đó, vì trong thời gian sau thi hầu như tôi khá rãnh rỗi. Bài viết không chất chứa nhiều bài toán, vì tôi nghĩ với xu thế thị trường sách tham khảo phong phú như bây giờ thì việc tìm những quyển sách tham khảo cho mỗi bạn không hề khó khăn, các bạn có rất nhiều sự lựa chọn tác giả và đầu sách phù hợp với khả năng, sở thích của mình. Vì thế, bài viết này chỉ đơn giản là một tài liệu nhằm trao đổi kinh nghiệm trong việc giải toán, **một công cụ để các bạn tìm ra lời giải cho bài toán, chứ không nhằm tiếp thu nhiều dạng toán khác nhau**.

Bài viết này phù hợp với các bạn học sinh đã học xong chương trình toán lớp 10, những bạn có mục tiêu điểm 7,8,9 môn Toán trong kì thi THPT Quốc gia và tuyển sinh ĐH, CĐ sắp tới. Tuy nhiên, một điều thật sự quan trọng, đó là trước khi bắt tay chinh phục các câu hỏi này, các bạn nên chắc chắn rằng mình đã nắm được bao quát kĩ năng giải 7 câu đầu tiên trong đề thi: Khảo sát – vẽ đồ thị hàm số, bài toán phụ khảo sát hàm số, số phức, logarit, hàm mũ, tích phân, hình học giải tích trong không gian Oxyz (Lớp 12), câu hỏi biến đổi/phương trình lượng giác, tổ hợp, xác suất, hình học không gian (lớp 11). Lấy điểm những câu vừa nêu đơn giản hơn nhiều so với lấy điểm ở những câu 8,9,10. Do đó, điều tối quan trọng là các bạn phải nắm thật chắc 7đ trước, sau đó hãy lăn vào cuộc chiến giành điểm cao. Thi đại học là một cuộc chơi lớn mà ở đó bạn, không những hay mà còn phải may và phải tỉnh táo. Làm được 3 câu cuối nhưng đánh rơi điểm số ở 7 câu còn lại là điều đáng tiếc. Vì khi công bố điểm thì không có khung nào chú thích vào “thí sinh làm được 3 câu khó nhất đề thi” đâu. Hãy lưu ý điều đó.

Nói như vậy không phải để các bạn nản lòng chiến sĩ. Tự tin là khí chất quyết định. Hãy luôn nghĩ rằng bạn sẽ làm được và bạn quyết tâm làm điều đó cho đến cùng. Hãy học kĩ những câu dễ và tìm cho mình một khoảng thời gian nhất định để tự rèn luyện 3 câu khó, hoặc là 1 câu hoặc 2 câu khó cũng được, vì nuốt trọn 3 câu là điều rất khó khăn. Quỹ thời gian không bao giờ thiếu, hãy sử dụng chúng thật tốt. Đường học vấn dài 12 năm, nhưng quyết định là ở 1-2 năm cuối cấp này. Quyết tâm chiến đấu và hãy tự vạch ra cho mình một kế hoạch để bức phá trong giai đoạn cuối này. Hãy nghĩ đến mục tiêu, đem lại sự bất ngờ về khả năng của bạn, cho cha mẹ, thầy cô và bạn bè.

Vì cũng chỉ là người đã từng tiếp thu tri thức, người đã đi trước các bạn một bước trong quá trình chuẩn bị cho kì thi lớn trong cuộc đời học sinh, nên trình độ nhận thức của tôi đôi khi cũng rất hạn chế. Bài viết này là những nhận thức chủ quan, có khi đúng, có khi sai, nhưng tôi sẽ cố gắng hạn chế tối đa những sai lầm. Chúng ta có thể trao đổi với nhau để tìm ra con đường ngắn hơn để đi đến kết quả cuối cùng. Tôi luôn sẵn sàng tiếp nhận những ý kiến trao đổi của các bạn và nhìn nhận sai lầm của mình.

Hi vọng bài viết sẽ là công cụ hữu ích cho các bạn trong bước đường chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc gia 2017, 2018 và những năm tiếp theo. Chúc mọi người, đặc biệt là các bạn TKNers có được một quá trình rèn luyện và chuẩn bị tốt cho kì thi của riêng mình, đạt kết quả cao nhất.

Xin cảm ơn các bạn!

KINH NGHIỆM VỀ QUÁ TRÌNH ÔN LUYỆN MÔN TOÁN

Như các bạn đã biết, đặc thù của môn Toán là môn học không đòi hỏi các bạn phải học thuộc lòng. Song, bên cạnh đó, ở môn học này đòi hỏi mỗi người phải tự xây dựng cho mình một cách học hợp lí, một lối tư duy cho bài toán mình đã gặp qua, vì sẽ chẳng bao giờ có chuyện cho bạn thi ngay vào những bài toán mà mình đã từng giải đâu. Vì thế, nhiều bạn hết sức lo ngại về môn này. Thứ nhất, có thể là do khối lượng kiến thức quá lớn, quá nhiều công thức có liên quan trải đều ở cả 3 lớp học 10,11,12 và riêng phần giải tích phẳng Oxy đòi hỏi các bạn phải có kiến thức về chương trình hình học THCS. Thứ hai, việc đòi hỏi tư duy ở các bài toán phân loại là khá lạ với nhiều bạn, về cách phát biểu thành lời của đề cũng như cách giải các bài toán đó. Thứ ba, quỹ thời gian quá khiêm tốn dành cho môn học cũng là trở ngại lớn, vì ta không thể nào bỏ qua 2 môn còn lại trong tổ hợp sở trường của mình, ví dụ Lí, Hoá (khối A) hay Lí, Anh văn (khối A1).

Do đó, điều các bạn cần làm là vạch ra cho bản thân một thời gian biểu hợp lí, và theo tôi, các bạn nên tập cho mình thói quen học tập đều đặn, ví dụ mỗi ngày làm 1 hay 2 bài tập gì đó, dù là bài dễ hay bài khó, đều phải cố gắng hoàn thành. Vì khi đó đầu óc sẽ thoải mái hơn, tiếp thu kiến thức được hiệu quả và góp phần tạo cho mỗi bạn 1 nề nếp sinh hoạt điều độ, tránh quá tải trong công việc. Hoàn thành ở đây không phải là bạn phải giải cho được bài toán, mà là bạn đọc qua, ngâm nga vài phút đề bài, rồi phát thảo sơ lược cách tiếp cận bài toán, xem xét lời giải và rút ra cho mình những kinh nghiệm. Khi đó, khả năng của các bạn sẽ được nâng lên từng ngày, từng ngày. Những bước đi đầu tiên bao giờ cũng gặp nhiều khó khăn. Nhưng qua mỗi bài toán, mỗi lời giải mình tiếp thu là một phần kiến thức, dần dần đầu óc mình sẽ có riêng một cách tư duy cho những dạng bài tương tự. Các bạn đừng bao giờ nản chí.

Để giải quyết các vấn đề mà bạn có thể gặp, tôi nghĩ bạn nên:

- Nếu bạn đang bâng khuâng về mớ kiến thức khổng lồ gồm toàn những công thức dài ngoằn, khó nhớ: tôi nghĩ bạn nên có riêng cho mình một cuốn tập hay một quyển sổ tay, ghi chép lại những công thức mình cần nhớ hoặc khó nhớ. Đừng nên lạm dụng những tài liệu chép sẵn công thức mà hãy tự mình soạn nó, vì chữ viết của mình bao giờ mình cũng dễ đọc hơn (chắc là vậy ^^), bên cạnh đó sẽ giúp cho bạn gợi nhớ nhiều hơn về những gì mình đã suy nghĩ, đã tư duy, vì ẩn sau những công thức là cả một quá trình tìm tòi và suy nghĩ.

- Nếu bạn đang lo lắng về vấn đề mất gốc trong kiến thức nền: mất thì tìm lại, google luôn ở bên bạn, đừng lo! Khi nào gặp một kiến thức có liên quan đến chương trình lớp dưới mà không thể nhớ ra, hãy tra sách hoặc là tìm kiếm trên mạng, rồi lại ghi chép vào cuốn sổ tay của riêng mình. Đó là cách bạn tìm lại kiến thức mà tôi nghĩ là tuyệt vời, khi ta biết mình thiếu sót chỗ nào mà kịp thời chắp vá lại.

Còn khá nhiều vấn đề phát sinh khác và đòi hỏi bạn phải tự tìm ra hướng giải quyết riêng cho mình. Nhưng tôi muốn nói rằng, nếu bạn muốn vào đại học, bạn phải cố gắng thực hiện được ước mơ chứ không thể hoài mơ ước, bạn nên nghiêm khắc hơn với bản thân. Tất nhiên là phải luôn có những khoảng thời gian riêng để vui chơi giải trí, nhưng chỉ còn một thời gian không đủ dài để bạn có thể lơ là. Hãy đặt việc học lên hàng đầu và luôn cố gắng thực hiện ước mơ, đừng bao giờ nản chí!

Tiếp theo, tôi mời các bạn đến với nội dung chính của bài viết này.

VẤN ĐỀ 1: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG OXY

SƠ LƯỢC VỀ BÀI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG OXY

Bạn nào có theo dõi cấu trúc đề thi đại học những năm gần đây thì không khó nhận ra đây là câu hỏi ở vị trí số 8, nói nôm na là câu hỏi phân loại ở mức điểm 8. Để làm tốt dạng câu hỏi này, bạn cần:

- Nắm vững kiến thức hình học lớp 10, những kiến thức về vecto, tích vô hướng, khoảng cách, đường thẳng, phương trình tham số, tổng quát, elip (riêng phần hypebol và parabol những năm gần đây được giảm tải, các bạn nên hỏi rõ lại thầy cô giáo để biết thêm chi tiết, vì mỗi năm sẽ có một cấu trúc khác nhau).

- Xem lại kiến thức hình học THCS: các đường trong tam giác (trung tuyến, phân giác, đường cao,...), tứ giác nội tiếp (về góc chắn cung, góc ngoài tại một đỉnh,...), định lí Ta-lét về 2 đường thẳng song song (tỉ số giữa các đoạn thẳng), tam giác bằng nhau, tam giác đồng dạng, tính chất tam giác đều, tam giác cân,...

- Có khả năng nhận dạng các yếu tố mà đề bài cho: riêng phần này sẽ được đề cập kĩ trong bài viết.

- Khi làm xong, dựng hệ trục Oxy ngoài giấy nháp, thể hiện lên hệ trục các điểm, đường thẳng mà đề bài yêu cầu xem có hợp lí hay không. Đây là bước kiểm tra kết quả hết sức quan trọng, giúp bạn có thể chắc chắn rằng mình đã “xử đẹp” bài toán hình học phẳng Oxy.

- Một điều mà nhiều bạn hay bỏ qua là phải vẽ hình thật chuẩn. Thường thì đề bài sẽ cho về tam giác, hình chữ nhật, hình vuông,... với các yếu tố, tính chất hình học đặc biệt được che giấu đi, yêu cầu người giải tìm ra mới hi vọng giải quyết trọn vẹn bài toán. Hoặc chí ít là khi đã nhận ra điều đặc biệt, cũng có thể nêu ra mà không chứng minh nếu chứng minh không được, trong trường hợp này bạn chỉ có thể bị trừ từ 0.25-0.5đ cho bài toán 1đ (nếu những bước tính toán còn lại bạn làm đúng). Vì thế, bài toán dạng này tuy khó đạt được trọn vẹn 1đ nhưng việc kiếm từ 0.5-0.75đ là điều mà bạn hoàn toàn có thể làm được. Đừng bỏ qua cơ hội dù nhỏ nhoi này!

Chốt lại, với 5 gạch đầu dòng vừa nêu, bạn đã có tất cả những công việc để đi đến lời giải cho bài toán Oxy, riêng 2 gạch đầu dòng đầu tiên đòi hỏi ở chính bạn, hãy xem lại mục kinh nghiệm về quá trình ôn luyện để rút ra cho chính mình hướng đi phù hợp

nhất. Vì mỗi người sẽ có một khả năng hay một cách học khác nhau nên bạn đừng quá để tâm đến cách học của những bạn xung quanh, dẫu sao bạn cũng đi đến cái đích cuối cùng là ăn trọn câu hỏi 8đ này là được.

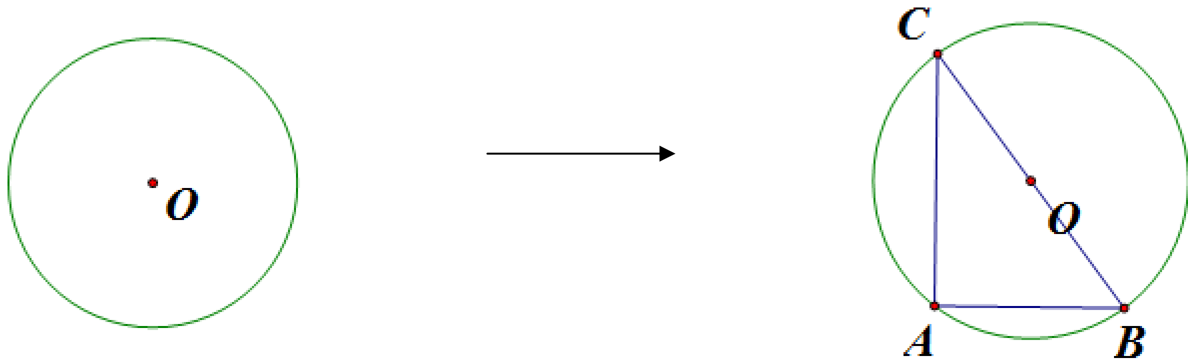
KINH NGHIỆM XỬ LÍ CÁC BÀI TOÁN HÌNH PHẲNG OXY:

1. Hướng giải quyết chung:

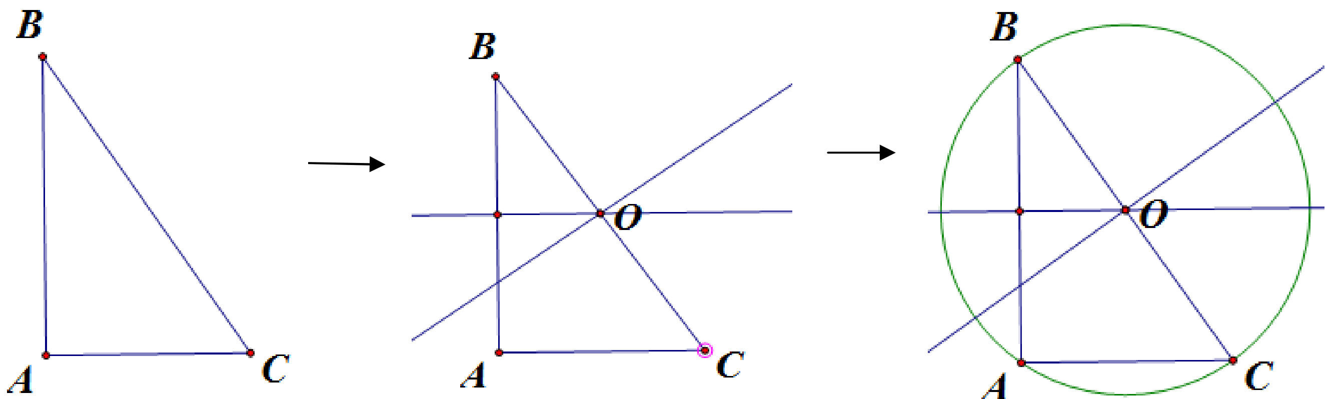
- Bước 1: Đọc đề bài thật kĩ, đọc đến đâu vẽ hình ra đến đấy và nên vẽ thật chuẩn. Bước khởi đầu này tuy đơn giản nhưng hết sức quan trọng.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Bạn có thể vẽ như sau:

C1: (Được khuyến khích) Vẽ đường tròn trước, sau đó vẽ tam giác vuông ABC



C2: (Hơi khó hơn) Vẽ tam giác vuông ABC, lấy giao điểm của 2 trung trực, dựng đường tròn. Khi vẽ xong xoá đi các trung trực, vì không quan trọng.



Một lời khuyên nho nhỏ: bạn nào yếu phần dựng hình thông qua tính chất của các đường trong tam giác thì nên làm theo C1.

(Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm ba đường trung trực, nhưng chỉ cần lấy 2 đường là đủ).

- **Bước 2:** Xâu chuỗi các dữ kiện và tìm tính chất hình học (nếu có): Vì xu hướng ra đề những năm gần đây đánh khá mạnh vào phần tính chất hình học phẳng ẩn sau một bài toán hình học giải tích nên đòi hỏi các bạn phải tìm ra mấu chốt bài toán được tác giả giấu kĩ, qua đó kết thúc trọn vẹn bài toán. Trong bước 2 này, dù tính chất được giấu, nhưng sẽ có những dữ kiện bài toán mà dựa vào đó, ta có thể đi tìm.

Tuy nhiên hiện nay có nhiều ý kiến cho rằng đề bài kiểu này là chưa hay và chưa mang lại 1 bài toán hình giải tích phẳng Oxy đẹp mắt và thuần tuý giải tích, nên có thể xu hướng này vài năm tới sẽ thay đổi, đánh mạnh vào phần kiến thức giải tích nhiều hơn. Vì vậy, bước 2 này là sẽ được bỏ qua nếu xu hướng hiện tại bị thay đổi đi.

- **Bước 3:** Dựa vào tính chất phát hiện cộng với dữ kiện bài toán, kết hợp kiến thức về phương trình đường thẳng, tích vô hướng,... tìm ra các điểm, phương trình đường thẳng hay đường tròn mà đề bài yêu cầu.

- **Bước 4:** Thể hiện hình vẽ lên hệ trục toạ độ Oxy ngoài giấy nháp để kiểm tra tính đúng đắn của lời giải.

2. Một số hướng giải quyết dữ kiện bài toán:

- **Giả thiết bài toán cho toạ độ 2 điểm** A,B chẳng hạn, ta viết được $\overrightarrow{AB}$, do đó ta có thể: viết phương trình đường thẳng AB, phương trình đường thẳng qua A và vuông góc AB, phương trình đường thẳng qua B và vuông góc AB, tính được độ dài AB,...

- **Giả thiết bài toán cho toạ độ 1 điểm C và phương trình đường thẳng AB**, ta có thể: tính được khoảng cách từ C đến AB, viết phương trình đường thẳng CD qua C và vuông góc hoặc song song với AB, tìm toạ độ điểm đối xứng với C qua AB,...

- **Giả thiết bài toán cho dữ kiện là phương trình đường tròn**: xác định được toạ độ tâm và độ dài bán kính, nếu đường tròn là ngoại tiếp tam giác ABC, thì muốn tìm toạ độ điểm B, C, ta cần viết được phương trình BC, sau đó giải hệ phương trình đường thẳng BC và phương trình đường tròn ngoại tiếp, suy ra 2 điểm B,C.

- **Nếu đã biết trước phương trình đường thẳng, ta có thể tham số hoá 1 điểm thuộc đường thẳng để dễ tính toán**. VD: cho đường thẳng $AB: x-y+1=0$, thì ta có: điểm A thuộc AB => $A(t;t+1)$. Việc sử dụng tham số t là thường gặp, còn nếu muốn, bạn hoàn toàn có thể theo tham số khác (a,b,c,...), cách tham số được hiểu như sau: với

phương trình $AB: x-y+1=0$, ta cho $x=t$, khi đó $y=x+1=t+1$, và vì điểm A có toạ độ là $A(x;y)$ nên có thể biểu diễn $A(t;t+1)$. Bước này khi đã quen thì không có gì đáng lo ngại. Tham số hoá toạ độ điểm như vậy để làm gì? VD: với đề bài cho phương trình đường thẳng $AB: x-y+1=0$ và điểm $C(2;5)$, tìm toạ độ điểm D thuộc AB, biết $CD=\sqrt{10}$. Ta có thể tham số hoá $D(t;t+1)$ rồi tính độ dài đoạn thẳng CD thông qua con đường tính vecto: $\overrightarrow{CD}=(t-2;t-4)\Rightarrow CD=\sqrt{(t-2)^2+(t-4)^2}$, rồi từ dữ kiện $CD=\sqrt{10}$, giải tìm t, sao đó suy ra toạ độ D.

Còn nhiều kiểu dữ kiện bài toán nhưng hầu như tất cả các dữ kiện đều qui về việc yêu cầu tìm toạ độ điểm hoặc viết phương trình đường thẳng, vì thế các bạn phải nắm lí thuyết cho thật vững.

3. Suy luận yêu cầu bài toán từ giả thiết:

Dữ kiện bài toán đưa ra bao giờ cũng dẫn dắt ta đến một yêu cầu nào đó. Đó có thể không phải là kết quả của bài toán, nhưng có thể là bước đệm để dẫn đến kết quả cuối cùng. Ví dụ: khi cho tam giác ABC, có các dữ kiện kèm theo và yêu cầu tìm toạ độ đỉnh A, thì các dữ kiện đó có thể sẽ không dẫn chúng ta đến ngay toạ độ điểm A cần tìm, mà ta phải tìm toạ độ B,C hay toạ độ các điểm đặc biệt khác trong tam giác như trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp,... Do đó, phải thật bình tĩnh khi đối mặt với các bài toán Oxy, phải đưa ra một hướng tư duy mở đường, đặt ra các câu hỏi cho bản thân như: có thể tìm được điểm nào trước, dữ kiện đề bài cho có thể khai thác như thế nào, từ đó sâu chuỗi dữ kiện để đi đến 1 kết quả có lợi nào đó.

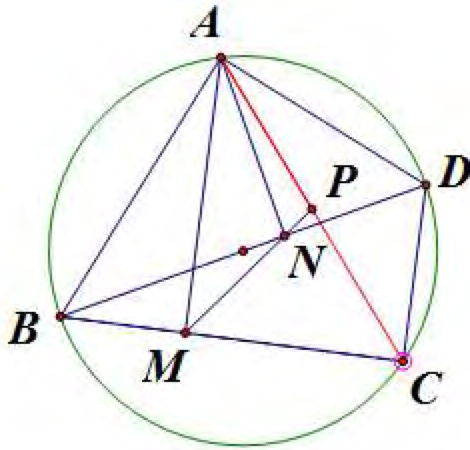
Ta xem xét đề bài sau, và tôi sẽ xem đề bài này như một ví dụ xuyên suốt các phần tiếp theo của bài viết, bài toán được trích từ đề thi THPT Quốc gia 2016 (lượt bỏ chút xíu):

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của hai đường thẳng MN, AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x-y-1=0$, $M(0;4), N(2;2)$. Tìm toạ độ các điểm P, A, B.

*** Xâu chuỗi các dữ kiện**: nhìn nhận đề bài, có thể bạn nào cũng sẽ rút ra được những dữ kiện của bài toán, theo đó ta thấy ngay rằng:

- Đã có phương trình AC, ta có thể: mã hoá toạ độ điểm A, điểm C, tính khoảng cách từ một điểm khác nằm ngoài AC đến AC. Vì đề bài hỏi điểm A nên ta sẽ ưu tiên suy nghĩ vào điểm A trước (bỏ qua những suy nghĩ dành cho điểm C).

- Đề bài cho toạ độ 2 điểm MN: ta có thể viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm M và N (dưới dạng phương trình tổng quát), tính độ dài đoạn thẳng MN, viết được phương trình qua M và vuông góc với MN, qua N và vuông góc với MN.



- Tiếp theo là **các dữ kiện liên quan đến tính chất hình học**: tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD, suy ra các góc BAD, BCD vuông (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

- Cuối cùng là **giả thiết:** $AM \perp BC, AN \perp BD$.

Đến đây, ta coi như đã tóm gọn giả thiết để dễ hình dung hơn. Công việc này giúp bạn bỏ qua đề bài đầy chữ và chỉ chú tâm vào những gì mình đã tóm lược và hình vẽ **chuẩn.** Riêng những tính chất hình học nên biểu diễn lên hình vẽ chứ đừng dại gì viết ra giấy. Kết thúc quá trình xâu chuỗi giả thiết.

Tiếp theo, ta **suy luận yêu cầu bài toán từ giả thiết.** Yêu cầu bài toán là tìm toạ độ các điểm P, A, B. Có một chi tiết dù nhỏ nhưng rất thông dụng, đó là **toạ độ 1 điểm sẽ được xác định khi ta biết được phương trình 2 đường thẳng tạo nên giao điểm đó.** Trong bài toán này, ta sẽ xét từ từ các điểm đề bài yêu cầu. Ta thấy điểm $P = MN \cap AC$, mà MN và AC ta hoàn toàn có thể viết được các phương trình đường thẳng. Do đó coi như ta đã xử lí xong điểm P. Ta có $MN: x + y - 4 = 0$ và AC: $x - y - 1 = 0$ nên toạ độ điểm P là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$, giải hệ ta tìm được bộ toạ độ P. Xong! Ta tiến đến giải quyết điểm A và B. Ta thấy rằng: điểm A thuộc đường thẳng AC đã biết phương trình, còn điểm B hoàn toàn chưa có manh mối gì cả (có chăng là B thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD), do đó, ta ưu tiên suy nghĩ tìm điểm A trước. Khi đã giải quyết trọn vẹn điểm P, lúc này ta có thêm được giả thiết $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. Ta tiến hành phân tích điểm A.

Muốn tìm toạ độ của 1 điểm, thường ta sẽ dùng phương pháp giống như đã tìm ra điểm P, tức là tìm phương trình của 2 đường thẳng mà A là giao điểm của nó, hoặc là

ta biết được độ dài của 1 đoạn thẳng nào đó chứa A, hoặc là biết được phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Các yếu tố này hoàn toàn ta không hề biết. Nhưng ta sẽ lần tìm từ **quan hệ giữa A các điểm đã biết toạ độ: M,N,P**. Ta tạm thời dừng lại tại đây, vì chưa thể tìm ra một cách rạch ròi những yếu tố ta vừa phân tích.

4. <u>Phát hiện và chứng minh tính chất hình học</u>:

Công việc này là **một phần trong bước đường tìm thêm các cơ sở giả thiết để ta giải quyết trọn vẹn bài toán**, ở ví dụ đang xét, ta đang bị "bế tắc" trong công cuộc tìm toạ độ điểm A, vì hầu như các điều kiện để tìm điểm A ta vừa phân tích đang chưa rõ ràng, còn thiếu thiếu một cơ sở gì đó để xử lí. Vì thế, ta dự đoán bài toán này còn một tính chất hình học được giấu đi và ta phải tìm nó. Nhưng có 1 lưu ý nho nhỏ rằng, khi nghi ngờ bài toán có tính chất hình học, bạn đừng vội vàng kết luận suy nghĩ của mình là đúng, vì có thể hình mình vừa vẽ rơi vào một trường hợp đặc biệt nào đó mà tính chất đó chỉ đúng với trường hợp đó, không đúng với các trường hợp còn lại, nói khác đi là bạn đang ngộ nhận tính chất, đi đến sai lầm.

Việc tìm và chứng minh tính chất hình học là một phần kiến thức thuộc chương trình hình học THCS. Nhưng cái khó ở đây là, hồi cấp 2 khi làm 1 bài toán hình học, ta luôn biết được đề bài yêu cầu mình làm gì, ví dụ cho một cái hình, yêu cầu chứng minh góc này bằng góc kia, tam giác này bằng tam giác kia hay tứ giác nọ là tứ giác nội tiếp,..v..v.. Nhưng bây giờ, mọi việc sẽ phức tạp hơn khi bạn vừa phải dự đoán, vừa phải chứng minh tính chất mà mình vừa dự đoán đó. Công việc này không hề đơn giản. Tôi khuyên các bạn nên tìm lại các kiến thức lớp 9 mà mình đã học, hoặc tìm trên mạng những tính chất hay, thực hành chứng minh dần dần, khi đó bạn sẽ nhuần nhuyễn các kĩ năng cần có để chứng minh hoàn tất một yếu tố hình học. Tôi có thể gợi ý cho bạn một số kiến thức từ quan trọng đến ít quan trọng hơn sau đây:

- Tứ giác nội tiếp, các góc trong đường tròn (góc ở tâm, góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung,...).

- Tam giác đồng dạng, tam giác bằng nhau, định lí Ta-lét, chú ý về tỉ số giữa các đoạn thẳng bị chắn bởi hai đường thẳng song song.

- Tính chất các đường trong tam giác: đường trung tuyến (trung điểm, trọng tâm), đường cao (trực tâm), đường phân giác (tâm đường tròn nội tiếp tam giác), đường trung trực (tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác), đường trung bình.

- Tính chất các cạnh và các góc trong hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

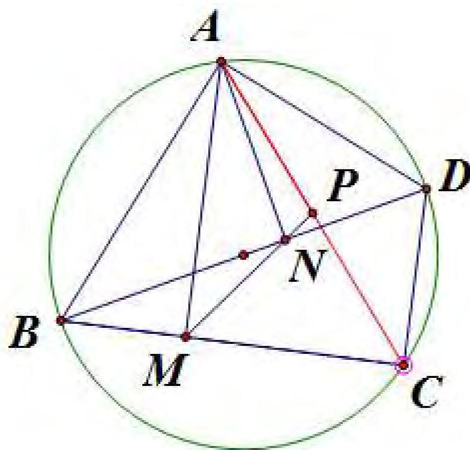
- Tiếp tuyến của đường tròn tại 1 điểm.

- Công thức tính diện tích tam giác (hình học 10), diện tích hình thang, bình hành,...

Hoặc nếu có thời gian và hứng thú, bạn cũng có thể tìm thêm một số kiến thức nâng cao về đường tròn Euler, đường thẳng Simson (tính chất của bài toán Oxy THPT Quốc gia 2016). Tìm, hiểu, chứng minh được hoặc xem chứng minh và tiếp thu được là ok, không cần nhớ tên chúng nó làm gì.

Các tính chất hình học có thể yêu cầu bạn chứng minh là trung điểm, trực tâm, trọng tâm, 2 đoạn thẳng bằng nhau, 2 đường thẳng vuông góc, song song hoặc tạo với nhau một góc bất kì không đổi, các điểm cùng thuộc một đường tròn,... Đó là một số định hướng cho các bạn.

Khi đã nghi ngờ tính chất nào đó, đừng ngần ngại mà hãy **đặt thước vào kiểm tra ngay**. Chúng vuông góc, song song hay bằng nhau gì gì đó cũng sẽ thể hiện qua cây thước thẳng, thước đo độ của bạn, và khi đã nhận thấy rồi thì nên vẽ thêm 1 hình khác để chắc chắn rằng nhận định của bạn là chính xác (không phải lúc nào cũng vậy, nếu như bạn đã chắc chắn thì nên tiết kiệm thời gian, khỏi vẽ hình cũng được, vẽ thì ok hơn).



Trở lại với bài toán của chúng ta, ta hoàn toàn có thể mã hoá toạ độ điểm A vì A thuộc đường thẳng AC đã biết phương trình, ta tìm **quan hệ giữa các điểm đã biết toạ độ với điểm A**. Ta phân tích một chút. Có thể bạn nghi ngờ P là trung điểm của AC, đặt thước vào đo ngay thì thấy điều bạn nghi ngờ có vẻ đúng. Nhưng hãy tự hỏi mình một câu rằng, nếu điều đó xảy ra, bạn có thể làm gì tiếp theo để tìm toạ độ điểm A? Nếu điểm C đã biết toạ độ, bạn hoàn toàn có thể đi theo con đường đó, nhưng không may, điểm C hoàn toàn còn là một ẩn số. Vì vậy, khả năng này ít xảy ra. Bỏ qua. Ta thấy rằng AP và NP hoàn toàn không có mối quan hệ nào, khả năng AP vuông góc với MP cũng là rất thấp. Tuy nhiên, nếu để ý một chút, bạn sẽ thấy được điều đặc biệt đến từ 2 đoạn thẳng AP và MP, dù không song song, vuông góc nhưng chúng hoàn toàn có khả năng bằng nhau. Đặt thước vào đo, bạn càng có niềm tin hơn vào suy nghĩ của mình khi thước cho độ dài 2 đoạn là như nhau. Vẫn tiếp tục đặt ra câu hỏi nếu điều đó xảy ra, ta làm gì tiếp theo. Đến đây, toạ độ M và P hoàn toàn xác định, ta tính được MP, toạ độ điểm A được mã hoá nên vecto AP chỉ còn chứa một ẩn số duy nhất (bạn có thể xem lại ví dụ ở cuối trang 7). Vì vậy,

điểm A có thể được tháo gỡ từ đây. Việc chứng minh $AP = PM$ tôi xin để dành cho các bạn, nếu hiện tại chưa chứng minh được thì có thể sau này, khi luyện đề, các bạn có thể lôi ra làm lại, có nếu không nhớ mà lôi ra làm lại thì thôi cũng chẳng sao, điều quan trọng là bạn cần xây dựng cho mình một lối tư duy cho việc tìm và phát hiện tính chất hình học. Điểm B có thể được tìm ra bằng **con đường tích vô hướng từ quan hệ bốn điểm B, A, N, M với A, M, N đã biết toạ độ.**

Sau đây là một dàn ý lời giải ngắn gọn cho đề bài vừa ra, không phải là lời giải hoàn chỉnh cho bài toán, và tất nhiên không thể trình bài vào bài thi như thế này được:

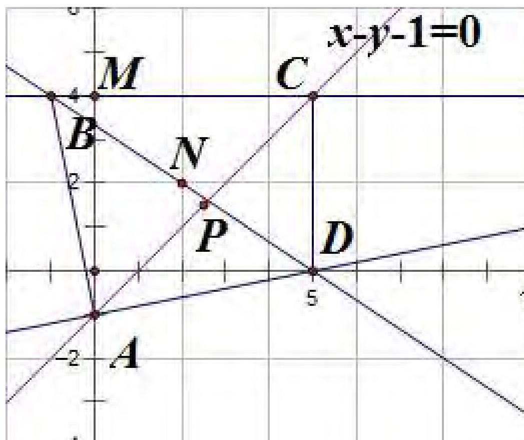
P là giao điểm của AC và MN, suy ra toạ độ $P\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Chứng minh PA = PM. Vì A thuộc AC suy ra $A(t;t-1)$. Ta có: $\overrightarrow{PA}=\left(t-\frac{5}{2};t-\frac{5}{2}\right)$

Suy ra: $PA=\sqrt{2.\left(t-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left|t-\frac{5}{2}\right|$, $PM=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. Vì $PA=PN\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(5;4)\\A(0;-1)\end{array}\right.$

Với $A(5;4)$ suy ra $B(0;5)$ (các bạn kiểm tra lại). Với $A(0;-1)$ suy ra $B(-1;4)$.

Trong bài toán trên, tôi đã cố tình lượt bỏ đi điều kiện của bài toán gốc là: **hoành độ điểm A nhỏ hơn 2**. Qua đó, tôi cũng lưu ý với các bạn rằng, dữ kiện nêu trên **chỉ sử dụng để loại bớt nghiệm khi tính ra toạ độ điểm A** và không góp phần vào cơ sở dữ kiện mà chúng ta đã phân tích trước đó. Đồng thời, điều này cũng **góp phần giúp bạn có thể dễ dàng trong việc định hướng lời giải** sau khi đã tìm ra điểm P, giúp bạn có cơ sở để đi tìm điểm A trước, sau đó tìm điểm B sau.



Và cũng đừng quên kiểm tra lại kết quả của bài toán bằng việc **biểu diễn các điểm vừa tìm được lên hệ trục toạ độ Oxy ngoài giấy nháp** để chắc chắn rằng kết quả của mình là đúng, để có thể kịp thời sửa lại nếu thấy không hợp lí.

Một lưu ý nhỏ trong việc kiểm tra lại bằng hệ trục toạ độ: các bạn vẽ lên toạ độ các yếu tố đề bài cho trước (điểm M, N, đường thẳng AC), sau đó là các yếu tố vừa tìm được (P, A, B), rồi kết hợp thêm các yếu tố hình học (góc BAD, góc BCD

vuông) để hoàn thiện hình vẽ, thường thì đề sẽ cho các điểm rơi vào các toạ đặc biệt hơn là các toạ độ xấu (chỉ là thường thường như thế thôi chứ không phải lúc nào cũng vậy đâu nha ^^). Các bạn kiểm tra kết quả còn lại bằng cách tương tự.

5. **Một số phương pháp giải quyết dữ kiện bài toán khi đã biết tính chất hình học**:

- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm và hợp với đường thẳng cho trước một góc α cho trước:

Dựa trên lối tư duy: **"Một điểm có toạ độ xác định khi nó là giao điểm của 2 đường thẳng đã biết phương trình"**. Kiến thức vận dụng ở đây chính là cách viết phương trình đường thẳng "sơ khai", ngay từ những buổi đầu các bạn bắt đầu học Oxy.

Điều kiện để sử dụng phương pháp này gồm: đã **biết trước 1 điểm mà đường thẳng đi qua, 1 đường thẳng khác đã biết phương trình và số đo góc α giữa đường thẳng cần tìm và đường thẳng đã cho**. Cách này tương đối hữu ích trong việc giải các bài toán liên quan đến hình vuông, hình thang và hình chữ nhật **đã biết trước tỉ lệ giữa các cạnh**.

Các bước sử dụng phương pháp:

1. Tìm góc α tạo bởi đường thẳng cần viết phương trình (d) và đường thẳng đã biết trước phương trình (Δ).

2. Viết phương trình dạng tổng quát của đường thẳng d: giả sử điểm $A(m;n)$ thuộc d, khi đó phương trình đường thẳng d có dạng: $a(x-m)+b(y-n)=0,\ \ a^2+b^2\neq 0$, đường thẳng $\Delta: cx+dy+e=0$, khi đó d và Δ lần lượt có các vecto pháp tuyến là $\vec{u}=(m;n),\vec{v}=(c;d)$

3. Dùng công thức tích vô hướng $\cos\alpha=\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

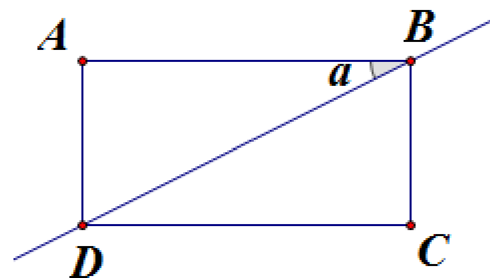
4. Biện luận cho a và b, suy ra phương trình đường thẳng cần tìm.

Ví dụ, cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2BC, phương trình đường thẳng $AB: x-2y+3=0$, điểm $D(0;2)$, tìm toạ độ điểm B.

Vẫn theo lối tư duy cũ, muốn tìm toạ độ B, ta cần biết **phương trình 2 đường thẳng mà giao điểm của chúng là B**, đề bài đã cho trước phương trình AB nên phần việc của ta là

đi tìm phương trình của đường thẳng còn lại. Các đường thẳng giao với AB tại B là CB, DB. Với đường thẳng BC, ta biết $BC \perp AB$, nhưng điểm C chưa có, nên chưa thể hội đủ 2 yếu tố (biết vecto pháp tuyến và 1 điểm thuộc đường thẳng) để viết phương trình. Nên trường hợp này ta tạm thời bỏ qua. Xét tới đường thẳng BD, ta hầu như đã hội đủ các yếu tố: **đường thẳng AB đã biết phương trình, điểm D đã biết toạ độ và góc hợp bởi AB và BD cũng có thể xác định được từ dữ kiện AB = 2BC**. Nếu thấy dữ kiện đề bài cho có tỉ lệ giữa các cạnh, các bạn phải dự đoán khả năng có thể viết phương trình đường thẳng theo cách này. Như vậy, các điều kiện đều đã có đủ, theo tuần tự từng bước ta thực hiện yêu cầu bài toán (các bạn trình bày lại):

1. Tìm góc tạo bởi AB và BD:



Ta có $\cos a = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(vì $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = AD\sqrt{5}$)

2. Giả sử $BD: ax + b(y-2) = 0,\ \ a^2 + b^2 \neq 0$

3. Sử dụng tích vô hướng: đường thẳng AB và BD có vecto pháp tuyến lần lượt là $\vec{u} = (1;-2), \vec{v} = (a;b)$. Ta có:

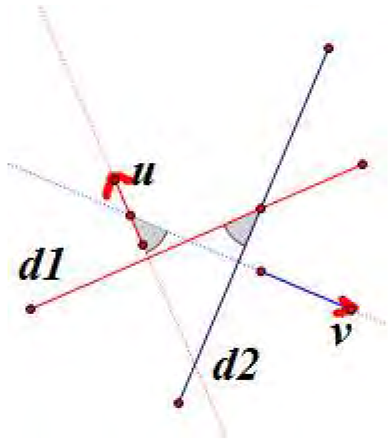
$$\cos a = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow (a-2b)^2 = 4(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{-4b}{3} \end{array}\right.$$

Cách giải phương trình trên là các bạn chia 2 vế cho $b^2, (b \neq 0)$, sau đó giải phương trình bậc 2: $3x^2 + 4x = 0$ với $x = \dfrac{a}{b}$, được 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, (vì\ b \neq 0) \\ a = -\dfrac{4}{3}b \end{array}\right.$.

4. Với $a = 0$, chọn b tuỳ ý, $b = 1$ chẳng hạn, suy ra phương trình $BD: y - 2 = 0$, suy ra B

Với $a = -\dfrac{4}{3}b$, "chọn b sao cho a đẹp", chẳng hạn $b = -3 \Rightarrow a = 4$, suy ra phương trình $BD: 4x - 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 6 = 0$, suy ra B.

Việc chọn giá trị ở bước 4 là hoàn toàn ngẫu nhiên, khi các bạn đã rút được quan hệ giữa các biến a và b thì việc cho giá trị a, b là tuỳ thuộc các bạn, miễn đừng cho 2 giá trị đồng thời bằng 0 là được, nên cho làm sao cho đẹp để còn dễ bề xử lí.



Có thể hiểu hơn phương pháp qua hình vẽ bên:

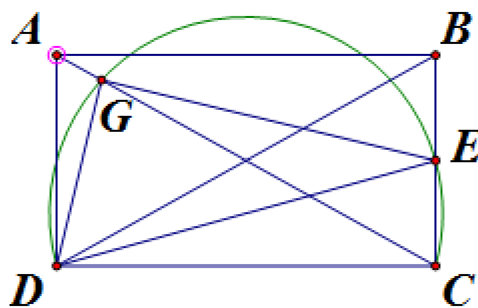
Trên hình, góc tạo bởi hai đường thẳng d1 và d2 và góc tạo bởi giá của hai vecto pháp tuyến của chúng rõ ràng bằng nhau, nên ta có công thức ở bước số 3.

- <u>Sử dụng dữ kiện diện tích</u>:

Đề bài cho dữ kiện diện tích, thường sẽ cung cấp cho bạn thông tin liên quan đến độ dài các cạnh, các đường trong hình, hoặc cũng có thể tính góc giữa 2 đường thẳng chẳng hạn (bằng công thức tính diện tích tam giác đã học $S = \frac{1}{2}ab\sin A$, tuy nhiên khả năng này thấp hơn), thường là độ dài đáy, đường cao trong tam giác, cạnh trong hình chữ nhật, hình vuông, hình thang vuông, hình bình hành,...

Các bước xử lí thường gặp khi gặp dạng dữ kiện này: bạn có thể **đặt ẩn cho các cạnh cần biết độ dài, rồi áp dụng các công thức diện tích, giải phương trình tìm ẩn đó**. Ví dụ, ta có đề bài sau:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 18. Gọi E là trung điểm cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cắt đường chéo AC tại G, (G không trùng với C). Biết $E(1;-1), G\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$ và điểm D thuộc đường thẳng d: x + y – 6 = 0. Tìm toạ độ các điểm A, B, C, D.



Dữ kiện **đã cho 2 điểm E và G ->** viết được phương trình EG, tính được độ dài EG.

Lại có **điểm D thuộc đường thẳng d đã biết phương trình**, một cách tự nhiên, ta tìm quan hệ 3 điểm G, D, E, vì điểm D là điểm khả dĩ nhất có thể tìm toạ độ.

Tứ giác GECD nội tiếp và $\angle ECD = 90^o$

$\Rightarrow \angle DGE = 90^o$, viết được phương trình GD, tìm được điểm D (GD giao với đường thẳng d ra D và cả 2 đường thẳng đều đã biết phương trình).

Đến đây, hầu như **chỉ còn 1 dữ kiện là diện tích hình chữ nhật ABCD = 18**. Ta phải tìm cách xử lí dữ kiện này. Như đã nói, dữ kiện diện tích cung cấp thông tin về độ dài của 1

đoạn thẳng nào đó trong hình. Ta tiến hành xem xét. Ta còn lại ba điểm A, B, C, ta cần tập trung vào điểm nào trước? Từ dữ kiện diện tích hình chữ nhật, ta dễ dàng **biết được diện tích các hình sau: ABCD, ABC, DCE, ABD, ACD, BCD**. Trong các hình vừa nêu, chỉ có tam giác DCE là chứa 1 điểm cần quan tâm (điểm C) và 2 điểm đã biết toạ độ (E,D), vì vậy ta tập trung xử lí hình này trước. Vậy, ta sẽ đi tính cạnh EC và CD, để hi vọng "kẹp" điểm C vào 1 dữ kiện khác rõ ràng hơn nữa. Nếu đặt EC=a, từ việc đã biết toạ độ điểm E và D, ta tính được độ dài đoạn ED, nên bằng định lí Pytago, hoàn toàn biểu diễn CD theo a. Cụ thể, điểm $D(4;2)$, nên $DE=3\sqrt{2}$, suy ra $CD=\sqrt{18-a^2}$, rồi từ công thức tính diện tích tam giác CDE, ta tính được a, vì ta có: $\left(S_{CDE}=\dfrac{S_{ABCD}}{4}\right)$. Giả sử $C(x;\mathrm{y})$, từ 2 giả thiết là $CE\perp CD, CE=a$, ta suy ra toạ độ điểm C. Từ đây, việc tìm toạ độ B và A (theo thứ tự) chỉ là chuyện nhỏ ^^. Các bạn xử lí gọn bài này nhé!

Từ ví dụ trên, dữ kiện diện tích cung cấp thêm 1 điều kiện ràng buộc cho yêu cầu bài toán, nếu không có giả thiết đó thì điểm C sẽ "chạy lung tung" khi ta chỉ có điều kiện tích vô hướng 2 vecto CE, CD bằng 0. Đây cũng là một hướng tư duy để các bạn áp dụng dữ kiện diện tích một cách hợp lí nhất.

Một điểm lưu ý nữa là trong cách xử lí dữ kiện diện tích, thường thì ta sẽ đặt ẩn cho cạnh và tìm ẩn đó. Việc này khá đơn giản nhưng đôi khi trong khi làm bài các bạn hay không nghĩ tới. Vì vậy, trong việc xử lí các câu phân loại của đề toán, các bạn phải thật bình tỉnh, đừng bất tỉnh nhé ^^.

- <u>Loại điểm dựa vào điều kiện cùng phía – khác phía của điểm so với đường thẳng:</u>

Tôi cũng chưa biết nên đặt tiêu đề sao cho dễ hiểu hơn nữa. Có thể bao hàm ý của chủ đề là: khi các bạn giải 1 bài toán Oxy, ví dụ như bài toán chúng ta vừa xét, có 1 điều phát sinh là bạn sẽ giải ra được 2 điểm C. Những trường hợp như vậy ta phải nghi ngờ. Nếu đề bài cho điều kiện kiểu như "hoành độ điểm nhỏ hơn 2; hoành độ điểm âm; tung độ điểm bé hơn -1" gì đấy, thì ta dễ dàng loại được điểm không mong muốn. Tuy nhiên, điểm C trong đề bài trên không có 1 điều kiện ràng buộc nào, mà nó lại bị ép trong một tính chất hình học: C và G **nằm khác phía (nằm về 2 phía)** so với đường thẳng ED. Vì vậy, 2 điểm C mà bạn giải được có thể là 1 điểm C thoả mãn điều kiện còn 1 điểm C thì không. Do đó, chúng ta phải loại đi điểm C không thoả mãn.

Cơ sở của mẹo loại điểm này là kiến thức: cho 1 đường thẳng $d: ax+by+c=0$ đã biết phương trình, 2 điểm A và B **được gọi là cùng phía so với d** khi và chỉ khi tích

$(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$

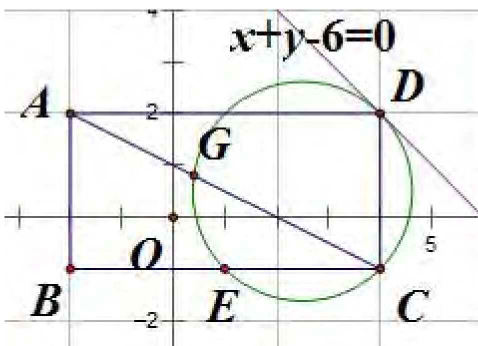
Điều ngược lại, A và B **khác phía so với d** khi và chỉ khi
$(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$

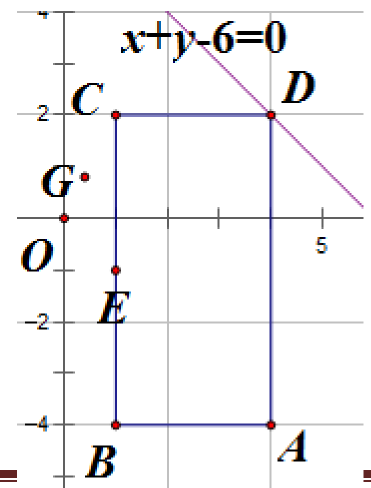
Do đó, tuỳ vào hình vẽ và yêu cầu bài toán mà ta sử dụng điều kiện này cho phù hợp. Đây là 1 kĩ thuật không khó, nhưng tôi cũng rất thường hay quên trong việc giải ra 2 điểm, vì giải ra được là tâm lí mừng lắm rồi, nhiều khi quên đi không hay. Các bạn nên lưu ý điều này.

Vì điểm C trong bài toán trên được thể hiện trên hình vẽ là khác phía với G nên ta dễ dàng sử dụng điều kiện và loại điểm C không thoả mãn. **Tuy nhiên, có nhiều bài toán, việc loại điểm là không hợp lí**, vì có thể hình mà bạn vừa vẽ chỉ là 1 trường hợp, trường hợp đó điểm cần tìm cùng phía với 1 điểm khác, nhưng trong 1 trường hợp khác thì chúng lại khác phía! Điều này rất hay gặp, nhất là khi giải các bài toán liên quan đến tam giác. Khi đề cho tam giác ABC và không kèm theo 1 điều kiện gì thêm, chúng ta thường vẽ tam giác nhọn cho dễ nhìn, nhưng lại còn một trường hợp nữa là tam giác ABC có 1 góc tù. Vì thế, tính chất của các điểm trong 2 loại tam giác này là khác nhau.

Do đó, cách khắc phục cho những bạn còn yếu trong việc nhận dạng tính chất hình học kiểu này (tôi cũng sử dụng cách này, một phần là để rút ngắn thời gian suy nghĩ, tăng tốc độ làm bài) là khi giải ra, ví dụ 2 điểm C trong bài toán vừa nêu, bạn cứ việc, ứng với mỗi điểm C giải tiếp bình thường, ra các điểm A, B còn lại, xong biểu diễn lên hệ trục toạ độ Oxy để kiểm tra, trường hợp nào không thoả mãn (hình trên hệ toạ độ cảm thấy "kì kì") thì bạn biết mình sẽ phải loại điểm. Quá trình này thực hiện ngoài giấy nháp, nhớ là phải thật bình tĩnh, không được ẩu bước này. Cách này tuy dài, nhưng hạn chế sai sót và tránh việc bạn bị "ngộ nhận", loại nhận điểm khi chưa hiểu bản chất của bài toán. Chính bản thân tôi đã gặp tình huống này nhiều lần và thật sự rất rất đáng tiếc.

Trong bài toán vừa nêu, điểm C có 2 điểm $C(4;-1)$ và $C(1;2)$. Các bạn hãy tìm các điểm A, B còn lại ứng với mỗi trường hợp. Ta có 2 loại hình vẽ sau:





Qua 2 hình vẽ, dễ dàng nhận thấy hình thứ 2 sai khi G không thuộc AC, trái giả thiết bài toán.

Hi vọng các bạn tìm ra cho mình con đường ngắn nhất để dẫn đến kết quả bài toán, không nhất thiết phải làm theo hướng này, vì nhiều bạn có thể đánh giá cách này hơi rờm rà.

6. Sử dụng hệ trục toạ độ Oxy "ảo" để chứng minh tính chất hình học:

Cách chứng minh này khá hữu ích trong trường hợp **các hình đã cho biết trước về tỉ lệ các cạnh (lại là tỉ lệ)**, ví dụ ta có tỉ lệ các cạnh hình vuông là 1:1:1:1 chẳng hạn, các hình chữ nhật cho biết cạnh này bằng mấy lần cạnh kia, tương tự với tam giác cũng vậy,...
Cơ sở phương pháp:

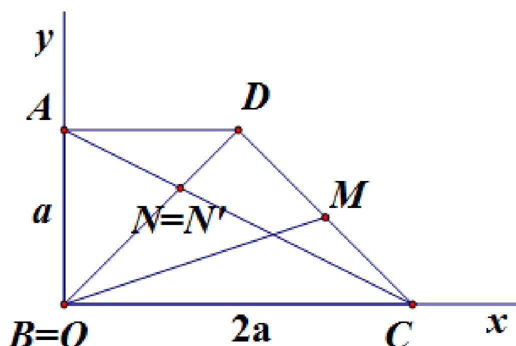
- Trước hết các bạn vẫn theo truyền thống cũ, đặt thước vào kiểm ra xem chúng song song, vuông góc hay các cạnh có bằng nhau hay không, phát hiện tính chất hình học, từ đó mà có hướng để xử lí tiếp theo.

- Lắp một hệ trục Oxy "ảo" vào hình, biểu diễn các điểm trên hình theo 1 hệ số tỉ lệ nào đó, rồi sử dụng các công cụ giải tích phẳng: tích vô hướng, công thức khoảng cách từ điểm tới đường,..v..v..

- Kết liễu tính chất hình học bằng các kết quả thu được.

Có vẻ hơi khó hiểu một tí, vì lí thuyết mà, cũng chẳng biết nói thế nào cho dễ hiểu hơn nữa, ta sử dụng 1 ví dụ sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại các đỉnh A, B và có $AB = AD = \frac{1}{2}BC$. Điểm $N\left(\frac{1}{3};1\right)$ thuộc đoạn thẳng AC và NC = 2NA. Đường trung tuyến kẻ từ B của ΔBCD có phương trình x – y – 2 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang ABCD biết điểm B có hoành độ âm.

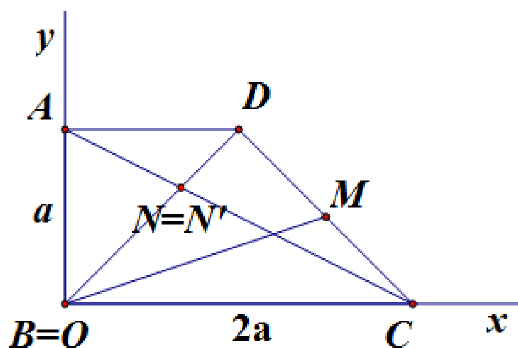


Các dữ kiện liên quan đến tính chất hình học đã được biểu hiện trên hình vẽ, do đó còn lại **2 dữ kiện** $N\left(\frac{1}{3};1\right)$ **và đường trung tuyến** $BM : x - y - 2 = 0$.

Lúc này tạm thời các bạn đừng quan tâm đến điểm N' và B=O. Ngoài ra còn có điều kiện ràng buộc "điểm B

có hoành độ âm" nên ta định hướng rằng có thể sẽ tìm được điểm B trước. Nhưng việc chỉ mới biết điểm B thuộc đường thẳng BM đã biết phương trình là chưa đủ để tìm toạ độ điểm B. Do đó, ta cần biết thêm 1 đường thẳng khác đi qua B, ta có các đường AB, BC và BD. Có 1 điểm đặc biệt là, khi vẽ hình, ta vô tình nhận thấy điểm N thuộc AC và cũng thuộc BD, điều này có thể bạn đã vẽ hình đặc biệt, vẽ thêm 1 hình khác, bạn sẽ thấy điều này vẫn đúng. Cơ sở tính chất hình học này gây cho ta niềm tin rằng nó đúng và chúng ta bắt đầu phân tích tiếp. Bạn đã biết rằng, **1 đường thẳng viết được phương trình khi biết 1 điểm thuộc đường đó và góc α tạo bởi đường thẳng đó và đường thẳng khác đã biết phương trình**, do đó ta còn thiếu 1 yếu tố là góc hợp bởi BD và BM để hoàn thành việc viết phương trình BD, từ đó suy ra điểm B. Trong khi đó, dễ thấy rằng ΔBDM vuông cân tại D và các cạnh BD, DM có thể tính được nhờ vào việc mã hoá cạnh AB, BC. Tóm lại, yếu tố hình học mà ta đang nghi ngờ hoàn toàn có cơ sở để đi đến yêu cầu bài toán. Ta lần lượt **chứng minh N thuộc BD và tính góc $\angle DBM$.**

Hình thang ABCD ta đã biết tỉ lệ các cạnh, hoàn toàn có thể sử dụng trục toạ độ Oxy "ảo" để chứng minh N thuộc BD. Để không mất tính tổng quát, bạn dựng hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ, với B trùng với góc toạ độ O. Trong cách dựng này, bạn **nên chọn 2 đường thẳng vuông góc nhau để lắp trục cho dễ.** Vì $AB = AD = \frac{1}{2}BC$ nên nếu cho AB=a thì AD=a và BC=2a. Bước này khá dễ nhưng các bạn nên cẩn thận với cách đặt số đo chiều dài như vậy vì đôi khi sẽ dẫn đến những nhầm lẫn tai hại. Để chứng minh N thuộc BD, ta sẽ chứng minh N là giao điểm của AC và BD, nhưng riêng tôi thấy chứng minh điều này là khá khó nhằn, nhưng tuỳ mỗi bạn có thể sáng tạo cho mình cách chứng minh riêng. Tôi đề xuất chứng minh theo cách sao: gọi N' là giao điểm của BD và AC, ta chứng minh N' trùng với N, tức là chứng minh N' cũng chia đoạn AC theo tỉ lệ N'C=2N'A. Ta tiến hành chứng minh: vì $AD//BC$ nên



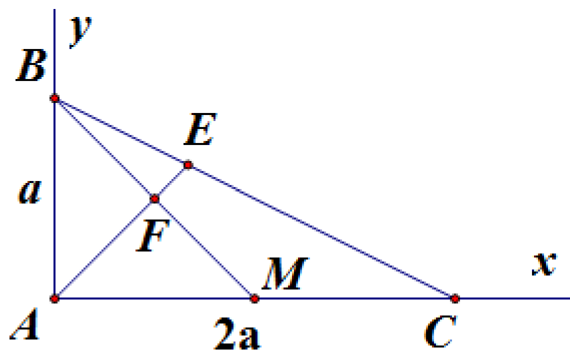
$\frac{N'A}{N'C} = \frac{AD}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow N'C = 2N'A$ (dpcm). Do đó N' trùng với N, suy ra N' thuộc BD.

Ta giải quyết được một nửa vấn đề, vấn đề còn lại là tính góc $\angle DBM$, việc này không khó khăn, ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ và $DM = \frac{DC}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, sử dụng Pytago lần nữa là tìm được BM ngay, từ đó tính được cosDBM, thế là bạn đã có đủ các yếu tố để viết phương trình BD rồi! Đến đây thì việc tìm B là tương đối dễ dàng, và chú ý 1 điều là $BN = 2ND$, sử dụng công thức vecto nữa là xong điểm D, riêng điểm A chỉ có

một yếu tố là $AB \perp AD$ nên ta cần biết thêm 1 yếu tố nữa để "chặn" điểm A. Vì B và D đã biết rồi nên có thể tính được BD, từ đó suy ra **độ dài AB hoặc AD** đều được. Kết hợp hai dữ kiện trên giống với các bài trước là tìm được điểm A ngay, có 3 điểm thì điểm C bỏ túi ngay rồi ^^. Nhớ loại nhận điểm A nhé!

Thêm một bài toán nữa mà **cách định hướng ban đầu thật sự quan trọng**. Qua đó, các bạn có thể thấy rằng, nên bắt đầu giải quyết yêu cầu bài toán từ những điểm có nhiều dữ kiện đề bài nhất, các điểm được nhắc đến nhiều nhất. Đó cũng chính là 1 bước tư duy để bạn khám phá các yếu tố hình học được giấu đi, và kết hợp với các kĩ thuật thích hợp để chứng minh, kết thúc bài toán. Tuy nhiên, bài toán này có lẽ vẫn chưa cho thấy sự ưu việc của hệ trục toạ độ, vì nhiều bạn có thể nói rằng việc dựng hệ trục là dư thừa trong cách chứng minh N thuộc BD, Ta-lét là xong ngay. Ta cần thêm 1 ví dụ nữa, ví dụ này đề cập đến cách chứng minh tính chất hình học bằng hệ trục "ảo", còn toạ độ các điểm thì... mất đề rồi nên không có biết nữa ^^:

Cho tam giác ABC vuông tại A, AC=2AB, BM là đường trung tuyến, $M \in AC$, E là điểm thuộc BC sao cho EC=2EB, chứng minh rằng AE vuông với BM.



Bài toán này có một cách là chứng minh AE là đường phân giác của góc BAC. Tuy nhiên ở đây tôi sẽ không đề cập đến cách đó vì tỉ lệ các cạnh được chia bởi phân giác không phổ biến với nhiều bạn. Tôi sẽ trình bày cách dùng hệ trục toạ độ để chứng minh. Trọng tâm của ta ở đây là thiết lập các vecto BM và AE theo a, sau đó dùng tích vô hướng 2 vecto này, nếu chúng bằng 0, ta có ngay đpcm.

Đầu tiên, ta lắp một hệ trục toạ độ Oxy, với A trùng với gốc toạ độ O như hình vẽ. Cách lắp vẫn là tìm 2 đường thẳng vuông góc mà lắp vào cho dễ. Sau đó, **biểu diễn toạ độ các điểm B, M, A, E lên hệ toạ độ**. Vì cách lắp A trùng với O nên điểm A có toạ độ $A(0;0)$, điểm B thuộc Oy nên $B(0;a)$, C thuộc Ox nên $C(2a;0)$, điểm E thì hơi không rõ ràng. Tôi giải thích chỗ này một chút. Mục tiêu của mình ta là đang đi tìm xem toạ độ điểm E là bao nhiêu, nên các bạn phải kẻ 2 hình chiếu vuông góc của E lên Ox và Oy, tức là lên AC và AB, khi đó đoạn AH, AK (H, K lần lượt là 2 hình chiếu vừa kẻ) chính là bộ toạ độ của điểm E. Bằng cách dựng 2 đường thẳng qua E vuông góc với AC và AB, theo định lí Talét ta có: $\frac{HC}{AC} = \frac{EC}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AC = \frac{3}{2}HC \Rightarrow AC = \frac{3}{2}(AC - AH) \Rightarrow AH = \frac{1}{3}AC = \frac{2a}{3}$,

(với H là giao điểm của đường thẳng qua E song song với AB và AC). Tương tự, ta tìm được AK.

Cuối cùng, ta suy ra $E\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3}\right)$. Ta đã có toạ độ của các điểm cần biết**, lần lượt đi tính các vecto $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BM}$, sau đó xét tích vô hướng $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BM}$** thấy tích này bằng 0, do đó $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BM}$, hay AE vuông góc BM. Mỗi bạn hãy suy nghĩ và tìm cho mình 1 hướng đi tốt cho dạng bài này, vì nó rất hữu ích.

Ngoài việc sử dụng cho các hình đã biết trước tỉ lệ, cách lắp hệ trục toạ độ Oxy "ảo" này còn được dùng cho một số hình khác không biết trước tỉ lệ, nhưng các trường hợp này khá hiếm và khó, vì có tỉ lệ, các bạn mới biểu diễn được cụ thể toạ độ các điểm lên hệ trục, việc giải dễ dàng hơn.

Tóm lại, việc lắp hệ trục toạ độ Oxy "ảo" để chứng minh tính chất hình học gồm các bước chính sau đây:

1. Đặt thước vào, suy nghĩ, nghi ngờ và dự đoán tính chất hình học.

2. Lắp hệ trục Oxy vào hình vẽ, nhớ lập luận "chọn hệ trục toạ độ Axy/Bxy (A/B trùng O như hình vẽ).

3. Xác định toạ độ của các điểm trên hình thông qua độ dài của các hình chiếu vuông góc. Trước bước này là việc mã hoá độ dài các cạnh nào dễ biết trước theo một tham số nào đó, trong các ví dụ vừa ra là a.

4. Tiến hành chứng minh thông qua con đường vecto: vuông góc -> tích vô hướng; chia đoạn thẳng theo tỉ lệ -> đẳng thức vecto; song song -> vecto này bằng k lần vecto kia,... (những điều này các bạn xem lại lí thuyết về các vecto).

5. Xử lí yêu cầu bài toán. Xong! Nhẹ nhàng hơn là việc sử dụng tính chất hình học thuần tuý để chứng minh. Tuy nhiên điểm yếu của phương pháp là không phải dạng bài nào cũng dùng hệ trục Oxy "ảo" được, các bạn nên suy nghĩ kĩ kẻo lầm đường.

7. Một số cách sử dụng đường tròn và phương trình đường tròn:

Riêng về phần này, tôi cũng thú thật là bản thân chưa có nhiều ý tưởng cho một bài toán có liên quan đến đường tròn và phương trình đường tròn, vì lớp bài toán ở dạng này tương đối hiếm, ít gặp. Tuy nhiên, nói như vậy không phải các bạn có quyền chủ quan, xem thường. Cái nào càng hiếm thì những kì thi sau càng có xác suất ra đề cao

hơn (ví dụ năm 2016 cho bài toán số 9 là phương trình siêu việt, bài toán số 10 lại cho khảo sát hàm mũ trên một miền tương đối khó xác định,...). Vì thế, ở đây tôi chỉ xin nêu ra những vấn đề mình thu nhặt được, hi vọng mỗi bạn sẽ có cách suy nghĩ sáng tạo, mới mẻ hơn trong quá trình giải toán.

Về đường tròn, đó là một phần tương đối rộng trong phần tính chất hình học. Người ra đề rất hay kèm theo đường tròn trong hình vẽ, dù là dữ kiện chính hay dữ kiện mang tính chất bước đệm. Vì thế, các bạn nên xem kĩ các kiến thức về góc, về đoạn thẳng,... trong đường tròn. Bài toán cho đường tròn, các bạn không nên nghĩ đến việc viết phương trình đường tròn (ptdt) đầu tiên. Vì để viết ptdt cần đến 2 yếu tố: tâm và bán kính, khá khó để xác định.

Về ptdt, đó là một dữ liệu rất sâu về ý nghĩa (các bạn tìm hiểu thêm) gồm: cung cấp thông tin về toạ độ tâm, chiều dài bán kính, phương trình của 1 "đường"-giống đường thẳng vậy thôi,...

Một số bài toán về tiếp tuyến, cát tuyến với đường tròn, tương giao giữa đường tròn và đường thẳng các bạn tim hiểu thêm. Những phần này nhìn chung xoay quanh công thức tính khoảng cách mà các bạn đã học, chú ý so sánh khoảng cách giữa các đường đã nêu với bán kính là xong.

Riêng một vài bài toán khó về đường tròn có liên quan đến tính chất cung và dây cung, yếu tố vuông góc, song song của các đường trong đường tròn. Một số bài toán khó khác đòi hỏi tư duy dựng hình và tìm ra tính chất được che giấu phức tạp.

Phần đường tròn, nhìn chung là một yếu tố dữ kiện cho chung với các hình khác như tam giác, hình chữ nhật, hình vuông,... nên nhiều bài toán trên đây cũng đã lồng ghép. Riêng phần các bài toán chuyên sâu về đường tròn như trục đẳng phương, 2 đường tròn các nhau, lồng nhau,... tôi xin không đề cập (nhưng có thi nha). Các bạn chịu khó đọc sách và xem qua phần này, các bài toán hầu như có khuôn dạng và có thể luyện tập một thời gian thì các bạn sẽ nắm được thôi.

Đó là một số điều tôi tiếp thu được trong quá trình học và luyện tập bài toán hình giải tích phẳng Oxy, còn 1 vấn đề mà tôi không tiện viết ra, đó là về các tính chất hình học. Việc này đòi hỏi quá trình rèn luyện của các bạn. Nhưng hi vọng qua các chia sẻ của tôi, các bạn có định hướng rõ ràng hơn trong việc tiếp cận và tìm tính chất hình học bị giấu đi. Các bạn cố gắng phát hiện tính chất, còn nếu chứng minh không được, thì cứ làm tiếp mà bỏ qua quá trình chứng minh, ví dụ trong đề thi THPT Quốc gia 2016, các

bạn có thể nêu PA = PM, rồi sử dụng nó như một giả thiết và giải tiếp. Việc đó chỉ làm cho bạn bị trừ 0.25 đến 0.5đ cho 1 bài toán 1đ thôi. Đừng bỏ hết, tiếc lắm!

VẤN ĐỀ 2: KINH NGHIỆM XỬ LÍ CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

SƠ LƯỢC VỀ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu hỏi ở vị trí số 9 luôn gây khó khăn cho các bạn về mức độ phức tạp của nó. Nếu bài toán Oxy còn có thể khái quát được ta nên làm gì, thì bài toán này hầu như chỉ có thể lần tìm từ từ dựa trên những suy luận về nghiệm và "hình dáng" của phương trình (tôi xin nói "phương trình" thay cho "phương trình, hệ..." cho gọn). Hiện nay, có một trào lưu Casio đang lan tràn trên thị trường, nó giúp ích khá nhiều cho các bạn trong việc giải bài toán này. Tôi cũng là người có tiếp nhận và sử dụng một phần kĩ thuật Casio này. Tuy nhiên, với quan điểm cá nhân, tôi nghĩ các bạn không nên lạm dụng máy tính quá mức, vì cái gì quá cũng có hại. Việc Solve nghiệm và chức năng table dò nhân tử là quan trọng, nhưng quan trọng hơn là cách tư duy, định hướng cho từng dạng bài toán cụ thể. Đừng nên tôn sùng một "môn phái" nào quá mức, hãy luôn nhớ rằng toán học luôn là nơi dành cho sự tư duy sáng tạo hơn là lối mòn cũ kĩ. Casio cứ rần rần thế không chừng mấy năm sau bộ lại bỏ cả câu này thay bằng một câu khác như bài toán thực tế hay những chuyên đề về đa thức, dãy số chẳng hạn. Tới đó thì cũng cắn răng mà chịu thôi.

Theo như tôi thấy thì bài toán phương trình, hệ phương trình này ít tiếp xúc ở cấp ba, có chăng là một ít trong chương trình học kì 2 năm lớp 10 các bạn được học về các phương trình dạng cơ bản, bậc 2, phương trình đẳng cấp,... nên nhiều bạn nhìn vào loại bài toán này là ngao ngán ngay bởi độ phức tạp của nó, nào là căn thức, nào là bậc 3, 4, rất khó xử lí. Vì thế yêu cầu ở bước đầu tiên là các bạn phải tập làm quen với nó trước đã, phải tiếp xúc nhiều để không còn xa lạ cảm giác phải đối mặt với "đám rừng" đáng ghét này nữa.

Khi đã quen dần, các bạn bắt đầu học cách giải nó. Nhìn chung thì việc giải phương trình xoay quanh những phương pháp chính như **rút nhân tử - phương trình tích, đặt ẩn phụ, đưa về dạng phương trình cơ bản, phương pháp hàm số, đánh giá thông qua các bất đẳng thức**,... Từ những phương pháp nền tảng này mà tuỳ vào mỗi bài toán khác nhau, ta lại dùng những phép biển đổi khác nhau, vận dụng một, hai và thậm chí ba phương pháp kết hợp để qui cái lạ thành cái quen. Các bạn hẳn có nghe câu slogan của Bộ là: "đề thi cho sát với chương trình SGK". Mấy bác nói đúng đấy, nhưng mà là sau khi ta đã qui những cái phức tạp thành cái quen thuộc được học, không hề đơn giản!

Học giải phương trình là cả một quá trình, bạn nên đi từ những bài cơ bản trước đã. Đó không những là những bài dễ nuốt và giúp bạn cảm thấy tự tin hơn mà còn là bước hình thành những cơ sở phương pháp để mọi việc về sau được trở nên nhẹ nhàng.

KINH NGHIỆM XỬ LÍ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH

Có 5 phương pháp theo thứ tự ưu tiên sau bạn cần nhớ:

1 - Rút nhân tử chung.

2 - Đặt ẩn phụ

3 - Liên hiệp

4 – Phương pháp hàm số

5 – Đánh giá (bất đẳng thức, đạo hàm,...).

Với 5 phương pháp kể trên, bạn hầu như có thể giải được tất cả các bài toán phương trình, tất nhiên là cộng thêm một chút biến đổi đẳng thức toán học nữa. Ta tiến hành xét từng phương pháp.

1. Rút nhân tử chung:

Đây là phương pháp truyền thống nhất mà bạn đã từng học. Rút nhân tử chung để hi vọng đưa về dạng phương trình tích làm cho phương trình trở nên đơn giản hơn. Với **sự hỗ trợ của máy tính và sơ đồ Hoocne** thì phương pháp này cũng trở nên nhẹ nhàng hơn. Ta xét một phương trình sau:

$$x^4+4x^3+3x^2-2x-6=0$$

Đó là một phương trình đa thức bậc 4 có nghiệm đẹp (nghiệm là 1, do tổng hệ số bằng 0), do đó ta hoàn toàn có thể tách được nhân tử. Hoặc đơn giản hơn, bằng máy tính Casio, ta solve nghiệm cũng được 2 nghiệm đẹp như hình bên cạnh. Hình 2 diễn tả cách tìm nghiệm thứ 2 khi ta đã có 1 nghiệm bằng 1. Kĩ thuật này quen thuộc và cũng khá dễ nắm bắt, các bạn cố gắng.

Hoặc khi nhẩm được nghiệm 1, ta cũng có thể dùng sơ đồ Hoocne:

XXXXXX	1’	4’	3’	-2’	-6’
1*	1’	5	8	6	0
-3*	1’	2	2	0	X

Cách lập và sử dụng sơ đồ Hoocne:

1. Tạo lưới ô vuông như hình vẽ. **Ô đầu tiên bên trái bỏ**, không điền gì cả.

2. Điền các hệ số của phương trình vào **từng ô ở hàng thứ nhất**, chữ x của bậc nào không có thì điền hệ số bằng 0.

3. Điền nghiệm đã Solve hoặc dò được vào hàng học, chú ý bỏ ô đầu tiên của bảng.

4. Tiến hành tính toán theo công thức “**nhân ngang – cộng dọc**”, **số đầu tiên hạ xuống**, ví dụ ở hàng thứ 2, số 1’ hạ xuống, tiến hành “nhân ngang – cộng dọc”, lấy 1* nhân với 1’ rồi cộng với 4’ là được 5 điền vào ô tiếp theo, cứ thế mà làm hết hàng, **số cuối cùng luôn là số 0**, và là số 0 thì mới đúng. Công việc thực hiện tương tự với hàng nghiệm -3.

5. Khi đã hết hàng dọc, **hàng cuối cùng là hệ số của đa thức không có nghiệm thực**, được đặt tương ứng. Chẳng hạn hệ số cuối bảng theo hàng ngang là 1-2-2, nên đa thức ban đầu được tách thành 2 nhân tử có nghiệm là $(x-1)(x+3)$ và một đa thức không có nghiệm là (x^2+2x+2) nên ta có phương trình tương đương:

$$x+4x^3+3x^2-2x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x=1\, hoac\; x=-3$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

2. Đặt ẩn phụ

Phần đặt ẩn phụ bao gồm **ẩn phụ hoàn toàn và ẩn phụ không hoàn toàn**. Cách nhận dạng phương pháp này là trong phương trình có **những thành phần giống nhau** xuất hiện lặp lại, nên ta ý tưởng đưa chúng về một ẩn mới để phương trình trở nên gọn nhẹ, cơ bản hơn.

Về phần ẩn phụ hoàn toàn, tức là ta thay thế biến đã cho thành biến mới sao cho phương trình sau khi thay chỉ chứa một biến ta đã đặt. Ta xét ví dụ:

$$3\sqrt{x^2-2}=4-x^2$$

Một ví dụ rất dễ, vì cái tôi muốn nói ở đây là mấu chốt trong bài toán phương trình đặt ẩn phụ. Ta thấy rằng có những phần giống nhau được lặp lại, đó là x^2-2, thật vậy, ta

chuyển hết về một vế, ta có $3\sqrt{x^2-2}+x^2-2-2=0$, do đó có thể đặt $t=x^2-2$ rồi giải phương trình sau đó bình thường. Hoặc nếu ngại, bạn vẫn có thể đặt $t=\sqrt{x^2-2}$ cho gọn hơn. Phương trình thu được có dạng bậc 2, là phương trình cơ bản quen thuộc, coi như phương trình đã cho được giải quyết.

Về ẩn phụ không hoàn toàn, tức là khi thay thế biến đã cho bằng biến mới, ta không thể đưa phương trình ban đầu về một phương trình mới chỉ chứa hoàn toàn biến mới mà sẽ tồn tại song song hai biến. Dạng này khó và tương đối phức tạp hơn. Ta xét một ví dụ sau: $x^2-4x+(x-1)\sqrt{x^2-3x}=0$

Vẫn tương tự ví dụ trên, ta thấy có những bộ phận giống nhau khi ta biến đổi dễ nhìn hơn như sau: $x^2-3x+(x-1)\sqrt{x^2-3x}-x=0$, ta đưa ra ý tưởng đặt $t=\sqrt{x^2-3x}, t\geq 0$, phương trình trở thành $t^2+(x-1)t-x=0$. Các bạn thấy rằng, từ phép đặt trên, ta vẫn "có thể" rút x theo t, tuy nhiên việc làm này chỉ làm cho mọi việc thêm rối ren. Cho nên ta chỉ biến đổi căn thức và phần biểu thức giống nó ở ngoài. Để giải phương trình vừa nhận được, ta có kĩ thuật delta chính phương như sau: xem phương trình trên là **phương trình bậc 2 theo** t, tính delta, ta có:

$\Delta=(x-1)^2+4x=(x+1)^2$, do đó bằng công thức nghiệm phương trình bậc 2:

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, ta suy ra phương trình có nghiệm $t=1, t=-x$, thay $t=\sqrt{x^2-3x}$ vào mỗi trường hợp giải ra biến x, kết thúc bài toán.

Ngoài ra, đặt ẩn phụ còn có dạng đặt 2 ẩn phụ trở lên đưa về hệ phương trình. Dạng này tôi sẽ nói rõ hơn vào phần phân tích bài toán. Về cơ bản, việc đặt ẩn phụ dựa trên sự giống nhau về cấu trúc của các phần của phương trình. **Điều kiện của ẩn phụ không hoàn toàn như vừa nêu là delta phải dạng bình phương của một số** mới được, chứ không thôi thì cũng không sử dụng được phương pháp này.

3. Liên hiệp (liên hợp)

Đây là kĩ thuật rất thường sử dụng trong các bài toán chứ căn thức, và đó cũng là phạm vi sử dụng của nó. Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phải đoán trước được nghiệm (việc này không khó khi đã có Casio). Liên hiệp cũng gồm nhiều dạng, thường gặp là **liên hiệp với 1 số và liên hiệp nhị thức**.

Nếu nói sâu hơn về liên hiệp chắc cũng khó hình dung. Nhưng cơ bản là ta sẽ làm việc dựa trên nghiệm tìm được và các căn thức, xoay quanh giá trị của các căn thức.

Với dạng liên hợp với 1 số. Ta xét ví dụ sau:

$$2x-1+\sqrt{x+3}-\sqrt{10-x}=0$$

Bằng chức năng Solve của Casio, ta thấy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=1$.

Vì **chỉ có 1 nghiệm** nên ta ý tưởng liên hiệp với 1 số. Thay giá trị $x=1$ lần lượt vào từng căn ta thấy giá trị của chúng lần lượt là 2 và -3. Ta sẽ xử lí liên hiệp theo cách **trừ vào phía sau phương trình các giá trị đó**. Tức là phương trình đã cho tương đương

$$2x-1+\sqrt{x+3}-\sqrt{10-x}=0 \Leftrightarrow 2x-2+\sqrt{x+3}-2-\sqrt{10-x}+3=0$$

Có thể nhiều bạn đã biết đến phương pháp này rồi nhưng lại đặt câu hỏi tại sao có những con số vừa cộng trừ thêm vào phía sau các căn thức. Do vậy qua quá trình vừa nêu trên, hi vọng các bạn đã xử lí được thắc mắc của mình. Các bạn đừng quên khi cộng trừ vào thì kiểm tra lại các hệ số và bù đắp lại cho tương đương pt ban đầu.

Trước khi liên hiệp, tôi xin chú ý là có 2 dạng biểu thức liên hiệp chính là các hằng đẳng thức $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ dùng trong bài toán chứa căn bậc 2 và $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ cho bài toán chứa căn bậc 3.

Trở lại bài toán, ta tiến hành liên hiệp:

$$2x-2+\sqrt{x+3}-2-\sqrt{10-x}+3=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)+\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{\left(3-\sqrt{10-x}\right)\left(3+\sqrt{10-x}\right)}{\left(3+\sqrt{10-x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)+\frac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{x-1}{\left(3+\sqrt{10-x}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[2+\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}+\frac{1}{\left(3+\sqrt{10-x}\right)}\right]=0$$

Đến đây thì các bạn có thể xử lí được, khi trong ngoặc là biểu thức luôn dương với mọi x thuộc miền xác định của bài toán.

Đó là cách tôi trình bày chi tiết nhất có thể cho dạng toán này, mấu chốt của liên hiệp nằm ở những điểm sau: **nghiệm, căn thức, hằng đẳng thức và biểu thức trong ngoặc sau khi liên hiệp**. Giải quyết được 4 huyệt điểm đó, coi như bài toán phương trình dạng này hoàn tất. Có nhiều bài toán mà việc xử lí biểu thức trong ngoặc trong dấu căn sau liên hiệp khá vất vả, đòi hỏi nhiều kĩ thuật. Chúng ta sẽ tìm hiểu sau.

4. Phương pháp hàm số

Đây là phương pháp tương đối mới, dành cho những bạn **đã tiếp cận với kiến thức đạo hàm**, nên tôi xin dành để nói về phần này chi tiết hơn. Nhiều kiến thức được dùng sau đây được trích trong sách "**Phương pháp hàm số chinh phục giải toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất**" của tác giả **Nguyễn Đình Thành Công**, do NXB Khang Việt ấn hành. Tôi xin nói qua về cơ sở của phương pháp này một chút:

Hàm số đơn điệu gồm có 2 dạng là hàm số đồng biến hoặc hàm số nghịch biến. Cách xác định một hàm số đồng biến hoặc nghịch biến dựa vào **dấu của đạo hàm cấp 1**:

- Hàm số $f\left(x\right)$ được gọi là đồng biến (đơn điệu tăng) trên miền xác định K khi $f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in K$. Nếu có 2 số $x_1,x_2\in K$ sao cho $x_1>x_2$ thì $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$

- Hàm số $f\left(x\right)$ được gọi là ngịch biến (đơn điệu giảm) trên miền xác định K khi $f'\left(x\right)\le 0,\forall x\in K$. Nếu có 2 số $x_1,x_2\in K$ sao cho $x_1>x_2$ thì $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$

- Hàm số $f\left(x\right)$ **đồng biến hay nghịch biến được gọi chung là hàm số đơn điệu**.

Tính chất của một hàm số đơn điệu: với hàm số f đơn điệu trên miền xác định *K*, 2 biểu thức chứa biến $u,v\in K$, (chứ u,v không phải là biến đơn thuần), ta có:

- $f\left(u\right)=f\left(v\right)\Leftrightarrow u=v$ (1)

- $f\left(u\right)>f\left(v\right)\Leftrightarrow u>v$ nếu hàm số f đồng biến trên *K*. (2)

- $f\left(u\right)>f\left(v\right)\Leftrightarrow u<v$ nếu hàm số f nghịch biến trên *K*. (3)

Giải thích ý nghĩa chỗ này một chút, ví dụ ta có một hàm số f có dạng $f\left(x\right)=3x^2-2x-1$, hàm số này có đạo hàm $f'\left(x\right)=6x-2$, lập bảng xét dấu ta thấy

$f'(x) \geq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3};+\infty\right)$ và $f'(x) \leq 0, \forall x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$, do đó hàm số f đơn điệu trên từng khoảng xác định tương ứng của nó, nên ta có:

- Xét các giá trị $x=2, x=3 \in \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, vì f đồng biến trên khoảng này nên $f(2) > f(3)$

- Xét các giá trị $x=-1, x=0 \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$, vì f nghịch biến trên khoảng này nên $f(-1) > f(0)$

Các kiến thức trên đây, nhất là các công thức (1), (2) và (3) rất có ích trong việc giải các bài toán phương trình và bất phương trình. Các bài toán sử dụng phương pháp hàm số có nhiều dạng khác nhau:

- <u>Dạng 1</u>: Dạng phương trình $f(x)=k$ hoặc $f(x)=g(x)$

Qui trình giải:

1. Các bạn kiểm tra các phương pháp mà chúng ta đã xét qua như rút nhân tử, đặt ẩn phụ hay liên hiệp có được hay không, nếu không được hoặc được nhưng cách làm khó khăn và không trọn vẹn, ta nghĩ đến phương pháp hàm số.

2. Nhẩm nghiệm bằng máy tính Casio.

3. Tính đạo hàm $f'(x)$

4. Xét dấu của $f'(x)$ trên tập xác định của bài toán, miền xác định chính là bước đặt điều kiện của các bạn.

5. Từ đó suy ra tính đơn điệu của hàm số $f(x)$, trong đó:

+ Nếu $f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên miền xác định thì ta kết luận phương trình có tối đa một nghiệm và viết nghiệm mình nhẩm được vào.

+ Nếu $f(x)$ chưa thể xác định chiều biến thiên, thì ta tính tiếp đạo hàm cấp 2.

6. Tiếp tục tính đạo hàm cấp 2, làm tuần tự như trên, suy ra chiều biến thiên của đạo hàm cấp 1, suy ra chiều biến thiên của hàm số ban đầu, kết luận nghiệm.

Thường thì bài toán sẽ được giải quyết xong ở bước thứ 5, tức là ta tìm cách chứng minh đạo hàm lớn hơn hoặc bé hơn 0 trên miền xác định, nếu làm tới bước 6 thì bài toán sẽ khó khăn hơn rất nhiều.

Ta xét ví dụ cho dạng này đã được nêu ra: giải phương trình

$$\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-3}=2 \text{ (1) với } \begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-3} \\ k=2 \end{cases}$$

1. Các bạn có thể kiểm tra và giải bài toán theo phương pháp nhân liên hiệp xem sao

2. Bằng máy tính Casio, ta nhẩm được pt này có nghiệm $x=3$

3,4. Đặt $f(x)=\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-3}$, tiến hành xét hàm số trên $[3;+\infty)$, ta có

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}>0, \forall x\in[3;+\infty)$$

5. Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[3;+\infty)$. Suy ra pt (1) có tối đa một nghiệm.

Lại có $f(3)=2$, suy ra phương trình có nghiệm $x=3$. Kết thúc bài toán.

Dạng này thì tương đối dễ nắm bắt hơn trong lớp các bài toán pt dùng hàm số, các bạn cố gắng nhé. Ta đến với dạng ứng dụng công thức số (1).

- Dạng 2: Dạng phương trình $f(u)=f(v)$

Bạn có thể nhận ra sự khác biệt giữa dạng 1 và dạng 2 ở đây chính là cấu trúc của phương trình. Nếu dạng 1 là sự đối chiếu giữa 1 hàm số và 1 hằng số k nào đó thì dạng 2 là sự đối chiếu giữa 2 hàm số **cùng dạng**. Vì sao tôi lại nói cùng dạng? Vì chúng có cùng 1 kiểu hàm số nên được gọi chung là “ f ”, chỉ khác nhau ở biến số được sử dụng.

Cơ sở lí thuyết của dạng toán này nằm ở chỗ công thức số (1), tức là nếu hàm số f đang xét, ta chứng minh được nó đồng biến hoặc nghịch biến, thì từ $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$. Điều này làm cho bài phương trình được chuyển từ phức tạp sang dạng đơn giản, cơ bản hơn nhiều.

Có 3 bước chính để giải bài toán loại này:

1. Chuyển phương trình đã cho về 2 vế của phương trình sao cho **xuất hiện dạng hàm số giống nhau.** Đây là bước khó nhất và gian nan nhất, chúng ta sẽ xét sau.

2. Tính tạo hàm của hàm số $f(t)$ và cố gắng chứng minh hàm số này đơn điệu.

3. Từ $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$, giải tiếp phương trình thu được (điều này đơn giản).

Ta xét một ví dụ sau: giải phương trình $x^3+x=(x+2)\sqrt{x+1}$ (1).

Đây là một bài toán rất cơ bản thôi, tôi sẽ chủ yếu trình bày để thấy được những bước đi cơ bản trước. Còn những thủ thuật ta sẽ trở lại trong những phần tiếp theo.

Bài toán có tập xác định $x\ge -1$.

1. Từ (1) ta có:

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x^3+x=(x+1+1)\sqrt{x+1}\\ &\Leftrightarrow x^3+x=(x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}\\ &\Leftrightarrow x^3+x=\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}\end{aligned}$$

Các bạn đã thấy sự giống nhau giữa 2 vế chưa? Cả hai vế của phương trình **đều có dạng hàm số** $f(t)=t^3+t$ vì nếu ta thay $t=x$ thì ta có VP, và $t=\sqrt{x+1}$ thì ta có VT. Tức là ta đã tạo được dạng phương trình mong muốn $f(x)=f\left(\sqrt{x+1}\right)$ với u của chúng ta lúc này là x và v là $\sqrt{x+1}$.

2. Tính đạo hàm của hàm số làm cho chúng giống nhau, tức là hàm $f(t)=t^3+t$. Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=3t^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3. Vì $f(x)=f\left(\sqrt{x+1}\right)\Rightarrow x=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Phương trình $x=\sqrt{x+1}$ chính là phương trình dạng cơ bản mà chúng ta cần hướng đến. Qua bài toán, hi vọng các bạn nắm được hướng làm bài cơ bản của dạng toán này.

Về phần phương pháp hàm số tuy khó nhưng xoay quanh cũng chỉ có 2 dạng này thôi. Những bài khó sẽ bẫy các bạn ở bước đầu tiên là tách thành 2 hàm $f(u)$ và $f(v)$ như vừa nêu, sau đó là làm khó ở bước đánh giá đạo hàm dương hay âm.

Có một lưu ý là chỗ xét đạo hàm, miền mà chúng ta xét là **miền của biến số ở cả 2 vế của phương trình.** Sẵn tiện nói kĩ hơn về chỗ này một chút, miền xét đạo hàm của ta là hợp của tập xác định của biến x của 2 biểu thức u,v, trong bài toán trên, vì $u = x$ nên tập xác định của x là $\mathbb{R}$, còn $v = \sqrt{x+1}$ có tập xác định của x là $[-1;+\infty)$, hợp của $\mathbb{R}$ và $[-1;+\infty)$ bằng $\mathbb{R}$ nên hàm đặc trưng $f(t)$ phải xét trên $\mathbb{R}$.

5. <u>Phương pháp đánh giá</u>

Bài toán cho vào dạng này thường khó và đánh đố. Các bạn nên chú ý là chỉ dùng phương pháp này ở vị trí ưu tiên cuối cùng, tức là khi các phương pháp khác thử qua đều vô hiệu hoá. Phương pháp đánh giá này dựa trên **kiến thức đạo hàm và các bất đẳng thức toán học**.

Cách dùng đạo hàm thì các bạn có thể chuyển hết chúng về 1 vế rồi đánh đạo hàm. Phương pháp này giống phương pháp hàm số với dạng 1.

Cách dùng các bất đẳng thức cơ bản thì tương đối khó. Yêu cầu đầu tiên là các bạn phải nắm một số bất đẳng thức cơ bản như AM-GM, Cauchy-Schwarz,... có thể trình bày một số:

- Bất đẳng thức AM-GM (Cauchy):

Với a,b là hai số thực **không âm**, ta có: $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra khi a = b

Mở rộng, với 3 số thực a,b,c **không âm**, ta có $\dfrac{a+b+c}{2} \ge \sqrt{abc}$

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c

Bất đẳng thức hiển nhiên: với 2 số thực x, y bất kì, ta có $x^2 + y^2 \ge 2xy$

Dấu “=” xảy ra khi x = y

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (Bunhiacopxki):

Với các số thực a,b,x,y, ta có: $(ax+by)^2 \geq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Bất đẳng thức Schwarz: cho các số thực a,b,c,x,y,z, ta có $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Các bạn cố gắng xử lí bài toán pt từ 4 phương pháp trước, chứ đừng nghĩ đến phương pháp này. Ngoài những bạn đam mê và có thế mạnh về bất đẳng thức ra thì hầu như ai gặp bài toán bất đẳng thức cũng cảm thấy sợ, bản thân tôi cũng vậy thôi. Cho nên đây chỉ là một phương pháp phụ, đừng quan tâm đến nó nhiều quá.

Ngoài 5 phương pháp trên còn một vài phương pháp hỗ trợ khác như đưa phương trình về dạng tổng các bình phương, hoặc lượng giác hoá, đặt nhiều ẩn phụ. Tuỳ vào những bài toán cụ thể sau này mà tôi sẽ nói về chúng. Đôi khi rất hay nhưng hầu như ít có ứng dụng nhiều trong các bài toán mà tôi đã từng gặp.

Về bài toán phương trình, nó là một bước nâng cao hơn so với bài toán hình phẳng Oxy. Nhiều bạn có thể thấy bài này dễ hơn, nhưng thật ra, về lối tư duy mà nói thì cách tư duy của phương trình là phức tạp hơn Oxy nhiều lần. Vì thế, giải toán Oxy thì có hướng đi rõ ràng cho mọi bài toán như tôi đã trình bày, còn giải toán phương trình hầu như các bạn phải tự mò mẫm là chủ yếu, cơ bản dựa trên những cơ sở tôi vừa nêu. 5 phương pháp trên là đủ. Các bạn đừng nên học hỏi quá nhiều phương pháp, mà học cái nào chắc cái nấy và quan trọng là mình rút ra được những chú ý riêng cho từng phương pháp, làm phát triển thêm phương pháp và biến chúng trở thành cái của riêng mình.

1. Hướng giải quyết chung cho một bài toán phương trình

Cũng như bài toán Oxy, trong quá trình rèn luyện, tôi đã có một chút ý tưởng cho dạng toán phương trình này, với những bước suy nghĩ chung cho các bài toán:

Bước 1: Dùng máy tính tìm nghiệm phương trình bằng chức năng Shift – Solve. Bạn nào chưa biết về kĩ năng bấm máy tính này nọ thì trên mạng có hướng dẫn, nhiều lắm.

Bước 2: Định hình phương pháp: chúng ta có 5 phương pháp được đánh số ưu tiên từ 1 đến 5, theo tuần tự mà các bạn thử xem phương pháp nào là hợp lí nhất.

- Nếu phương trình không có căn thì ưu tiên 2 phương án 1 và 2.

- Phương trình chứa căn ưu tiên phương án 3, 4, 5.

- Phương trình chứa căn có biểu thức gắn vào, ví dụ: $(x+3)\sqrt{2x+1}$, ưu tiên đặt ẩn phụ không hoàn toàn và phương pháp hàm số, bên cạnh đó là phương pháp đưa về bình phương, một phương pháp tôi cũng có nhắc đến.

- Phương trình chứa đồng thời ẩn bậc 2 và căn bậc 2, ẩn bậc 3 và phần còn lại đưa được về dạng bậc 3 của căn thì ưu tiên phương pháp 4.

- Đối với phương trình mũ, phương trình chứa logarit thì nên dùng phương pháp 4, tuy nhiên phương trình thuần tuý logarit (đề thi THPT Quốc gia 2016) thì nên cẩn thận, bản thân tôi cũng sa đà và mất nhiều thời gian cho câu này.

Bước 3: Sử dụng các **điều kiện xác định** của phương trình để đánh giá chặn miền giá trị trong chứng minh một phương trình vô nghiệm: bước này sử dụng cho phương pháp liên hiệp là chủ yếu.

Bước 4: Hoàn thành bài toán, thử lại nghiệm, kết luận.

2. Phân tích dạng phương trình và tìm hướng giải quyết

Ta xét phương trình sau:

$$x^4+1+2\sqrt{x+1}=\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

Bài này khó, nhưng các bạn hãy cứ theo trình tự mà suy nghĩ từ từ nhé.

Bước 1: Sovle nghiệm, ta thấy phương trình có 2 nghiệm như bên màn hình máy tính.

Bước 2: Ta có nhận xét: với nghiệm chẵn x=1, ta hoàn toàn có thể nghĩ ra nhiều hướng cho bài toán từ phương pháp 1 đến 5. Nhìn bài toán này nhiều bạn sẽ ngán ngại rút nhân tử chung. Nhưng khoan vội, hãy bình tỉnh đã.

Bài toán xuất hiện căn $\sqrt{x+1}$ giống nhau ở cả hai vế của phương trình, nên ta ý tưởng phương pháp nhân tử chung hoặc ẩn phụ, nhưng ta thấy rằng, nếu ẩn phụ thì chỉ có

thể ẩn phụ không hoàn toàn, mà x còn lại đến bậc 4 nên khó có khả năng xuất hiện delta chính phương. Do đó tạm thời gác qua một bên. Muốn đặt nhân tử chung $\sqrt{x+1}$ thì nhất thiết phải tách cho 2 căn này thoáng một tí.

Nhân phân phối vế phải, ta có phương trình $x^4+1+2\sqrt{x+1}=\left(x^2+x\right)\sqrt{x+1}+x^2+x$. Ta thấy có $2\sqrt{x+1},\left(x^2+x\right)\sqrt{x+1}$ giống nhau ở căn thức, nên ta tiến hành đặt nhân tử chung $\sqrt{x+1}$. Cô lập các phần có vẻ liên quan nhau về một vế của phương trình, ta có:

$$x^4+1-x^2-x=\left(x^2+x\right)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+x^2-1\right)=\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+x^2-1\right)=(x-1)(x+2)\sqrt{x+1}$$

Bước rút nhân tử VT bạn có thể dùng máy tính và sơ đồ Hoocne, bước tách nhân tử ở vế phải là các bạn bấm nghiệm phương trình bậc 2 trong ngoặc là được.

Đã rõ ràng với ý tưởng của ta là bắt nhân tử. Phương trình do đó sẽ tương đương:

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^3+x^2-1=(x+2)\sqrt{x+1}\,(*) \end{array}\right.$$

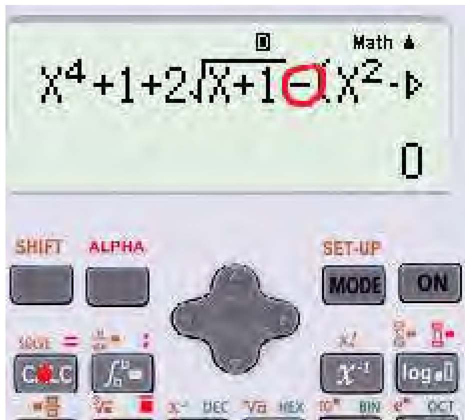
Ta xem xét tiếp, dường như có cái gì đó quen quen trong những cái ta đã nói ở trên, có mũ 3, có dạng bậc 3 của căn khi ta biểu diễn VP thành $\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\sqrt{x+1}$, do đó ta ý tưởng sử dụng phương pháp hàm số ở đây, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow x^3+x^2+x=\left(\sqrt{x+1}\right)^3+x+1+\sqrt{x+1}$$

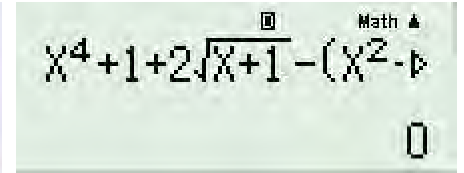
Công việc tiếp theo các bạn dựa vào ví dụ trước mà thực hiện nhé, bài này chúng ta bỏ qua bước 3 vì không cần phải xét miền chứng minh vô nghiệm gì cả.

Bước 4: Kết luận nghiệm, trước khi kết luận các bạn thay tất cả các nghiệm vừa tìm được vào phương trình ban đầu kiểm tra lại bằng chức năng CALC của máy tính. Cách làm là chuyển tất cả các hạng tử về một vế để vế còn lại bằng 0, sau đó thế giá trị nghiệm vào, miễn ra 0 là đúng. Ví dụ, ta nhập máy:

Nhập phương trình -> nhấn CALC -> nhấn phím 1 (1 nghiệm là 1) -> nhấn "=", màn hình hiện kết quả 0 là đúng. Tương tự vậy các bạn kiểm tra giá trị nghiệm còn lại nhé!







Ta xét phương trình tiếp theo:

$$x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$$

<u>Bước 1</u>: Nhận định phương trình, ta nhẩm được phương trình có 2 nghiệm là $x=4, x=\frac{1}{4}$.

<u>Bước 2</u>: Với phương trình chứa căn kiểu này thì có một phương pháp rất hay dùng là liên hiệp, nhưng với cấu trúc phương trình kiểu này thì liên hiệp cũng hơi cực khổ.

Đặt ẩn phụ thì sao nhỉ, thấy rằng, đặt $t=\sqrt{x}$ hay $t=\sqrt{x^2-4x+1}$ đều rất khó để rút x theo t. Nhưng mà với cấu trúc phương trình thế này, nhiều bạn sẽ thấy được sự quen thuộc của nó. Cách người ta sắp xếp $\sqrt{x}$ bên vế phải là có ý đồ, nên ta chú ý vào sự lạ mắt đó.

Ta ý tưởng chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{x}$ xem sao, phương trình thu được sẽ là $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-4}=3$. Có vẻ gọn hơn thì phải. Đến đây thì ý tưởng đặt ẩn phụ là rõ ràng, vì hầu như đây là dạng rồi, các bạn cố gắng nhé.

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow t^2=x+\frac{1}{x}+2$. Do đó phương trình trở thành $t+\sqrt{t^2-6}=3$. Xong rồi, dạng phương cơ bản, chuyển t đơn độc qua vế phải rồi bình phương là xong.

Ở bước đặt t, có một lưu ý nhỏ là phải đặt điều kiện cho biến t, để làm việc này, bạn có thể dùng kiến thức đạo hàm lớp 12 hoặc dùng bất đẳng thức AM-GM như sau:

Ta có $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}}=2$, do đó điều kiện ràng buộc là $t\geq 2$.

Có vẻ bất đẳng thức không phải là chuyện đơn giản với nhiều bạn. Vậy bạn chỉ cần nhớ, với dạng đặt t như trên hoặc $t=x+\frac{1}{x}$ thì điều kiện luôn là $t\geq 2$. Ghi thẳng vào bài làm khỏi cần trình bày cách tìm luôn ^^.

Kết thúc bài toán này ở đây. Có thể là nhiều chỗ các bạn vẫn còn bâng khuâng, và việc này đòi hỏi các bạn phải có quá trình rèn luyện lâu dài, qua sách vở, qua học tập từ thầy cô. Ở đây tôi chỉ hi vọng các bạn nắm được quá trình tư duy tìm phương pháp.

3. Kĩ thuật đặt 2 ẩn phụ

Đây là kĩ thuật thường dùng trong bài toán có 2 căn thức bị lệch nhau về bậc, thường gặp là **chứa đồng thời căn bậc 2 và căn bậc 3**.

Ví dụ, ta có phương trình sau: $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{2x+19}=4$

Phương pháp: đặt mỗi căn là một ẩn phụ. Ví dụ ta đặt:

$\begin{cases} a=\sqrt{x-3} \\ b=\sqrt[3]{2x+19} \end{cases}\Rightarrow a+b=4$. Để giải được, ta cần thêm một phương trình 2 ẩn a,b nữa, ta có: $\begin{cases} a^2=x-4 \\ b^3=2x+19 \end{cases}\Rightarrow 2a^2-b^3=-27$. Do đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b=4 \\ 2a^2-b^3=-27 \end{cases}$

Hệ này có thể giải quyết trọn vẹn bằng phương pháp rút thế. Các bạn tự xử nhé. Chú ý là khi tìm được giá trị a và b rồi thì chỉ cần sử dụng 1 giá trị và thế ngược lại chỗ mình đặt thôi nhé. Giả sử ra $a=1,b=2$ (giả sử thôi), thì thay $\sqrt{x-3}=1$ mà giải thôi, khỏi thay giá trị của b.

Ngoài ra, **kĩ thuật đặt 2 ẩn phụ còn được dùng với một số bài toán chứa 2 căn thức cùng loại**. Dạng này thường sử dụng kèm theo **hệ số bất định**. Tôi sẽ nói đến 2 vấn đề này cùng lúc.

Ta xét phương trình: $(5x+1)\sqrt{2x+1}-(7x+3)\sqrt{x}=1$

Bài toán có căn thức làm ta nghi ngờ phương pháp liên hiệp. Tuy nhiên, dính với các căn là các biểu thức có hệ số xấu và chẳng liên quan gì nhau. Nên phương trình này có thể dùng phương pháp đặt 2 ẩn phụ:

Ta đặt mỗi căn là một ẩn phụ, vẫn là lối tư duy đã được xây dựng, ta đặt:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2x+1} \\ b = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2x+1 \\ b^2 = x \end{cases}$$

Tuy nhiên, vấn đề phát sinh là còn 2 biểu thức (5x+1) và (7x+3) vẫn còn lẻ loi, ta chưa hoàn toàn chuyển chúng về dạng của a, b được, do đó, ta dùng phương pháp hệ số bất định để xử lí:

Giả sử $5x+1 = \alpha a^2 + \beta b^2$ và $7x+3 = \gamma a^2 + \omega b^2$ với $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ là những "hệ số bất định" mà **chúng ta tự đặt vào và nhiệm vụ là đi tìm giá trị của nó**. Ta xét từ từ các biểu thức:

$$\begin{aligned} & 5x+1 = \alpha\left(2x+1\right) + \beta x \\ & \Leftrightarrow 5x+1 = \left(2\alpha+\beta\right)x + \alpha \end{aligned}.$$

Ta cần 2 vế của phương trình bằng nhau để được một đẳng thức đúng, do đó:

$\begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta \\ 1 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$. Vậy ta đã biểu diễn được là: $5x+1 = a^2 + 3b^2$

Một cách tương tự, các bạn có thể tìm được đẳng thức còn lại: $7x+3 = 3a^2 + b^2$.

Cuối cùng, thế lại phương trình ban đầu, ta có:

$$\begin{aligned} & \left(a^2+3b^2\right)a - \left(3a^2+b^2\right)b = 1 \\ & \Leftrightarrow \left(a-b\right)^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1+b \end{aligned}$$

Thay ngược lại $a = \sqrt{2x+1}, b = \sqrt{x}$, các bạn có thể giải tìm x được rồi (bình phương 2 vế 2 lần).

Hệ số bất định là một phương pháp rất hay trong quá trình tư duy. Nói nôm na đó là phương pháp "đặt ẩn rồi tìm", dùng những kí hiệu ẩn tuỳ ý đặt vào và sử dụng **tính đồng nhất giữa các vế mà giải ra ẩn**.

Những bài toán khác nhau có những cách áp dụng tư duy khác nhau. Nhưng cách làm cơ bản là như vậy. Quan trọng ở các bạn là tìm ra sự tương đồng giữa các bộ phận của phương trình mà ứng dụng những phương pháp, kĩ thuật hợp lí.

4. Liên hiệp với số và liên hiệp nhị thức:

Trong phần phương pháp 3, tôi đã nói khái quát về phương pháp liên hiệp, bây giờ, tôi muốn nói rõ hơn một tí về phương pháp này vì nó khá quan trọng.

- Liên hiệp với số:

Lí do tôi luôn muốn các bạn bấm nghiệm để biết được hết nghiệm của bài toán trước chính là một phần để phát hiện phương pháp liên hiệp này. Liên hiệp với một số thì thường phương trình đã cho chỉ có một nghiệm, hoặc hai nghiệm nhưng trong căn thức là dạng phương trình bậc 2. Ta xét một ví dụ sau:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 \text{ (ĐH-B2010)}$$

Vẫn theo các bước mà ta đã thống nhất: bấm nghiệm có nghiệm là $x=5$ và đây là nghiệm duy nhất của phương trình, phương trình lại chứa căn thức nhiều và các căn thức khá độc lập, vì thế ta ý tưởng giải phương trình theo phương pháp liên hiệp với một số.

Cách làm thống nhất chung cho dạng bài này như sau:

- Các bạn thay nghiệm $x=5$ vào từng căn thức: với căn đầu tiên có giá trị là 4 nên bạn sẽ **trừ cho 4**, tức là tạo dạng $\sqrt{3x+1}-4$. Tương tự, căn thứ 2 có giá trị là 1, nhưng trước căn có dấu trừ, nên ta **cộng cho 1**, tức là tạo ra dạng $1-\sqrt{6-x}$. Tóm lại, giá trị của căn ra bao nhiêu thì bạn phải cộng/trừ sao cho tổng sau đó bằng 0. Ok! Vì đã -4 và cộng 1 nên phương trình sau có dạng:

$$\sqrt{3x+1}-4+1-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-5=0$$

Kết thúc qui trình đầu tiên. Các bạn dừng lại một chút xíu để ngẫm nghĩ cho thật kĩ nhé! Bản thân tôi thấy thì phương pháp này không mới, nhưng cách cộng trừ thêm số vào như trên thì nhiều bạn chưa hiểu lắm. Đó là mẹo để các bạn hiểu rõ cách cộng trừ và phải nhớ cộng trừ cho chính xác.

- Tiến hành liên hiệp: đây là dạng căn bậc 2 nên sẽ dùng hằng đẳng thức quen thuộc $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Ta có phương trình tương đương:

$$\frac{3x+1-4^2}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1^2-(6-x)}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right]=0$$

Đến đây các bạn có thể giải được $x=5$ từ tích đầu tiên, còn ở dấu ngoặc vuông thứ 2 đòi hỏi các bạn phải có sự đánh giá giống như ở bước 3 phần hướng dẫn chung tôi đã nói. Các bạn phải có sự linh hoạt trong đánh giá tập xác định của biến x, mà trong phương trình này, ta rút được từ điều kiện $\frac{-1}{3}\le x\le 6$. Và với điều kiện đó thì $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0$, do đó pt $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1=0$ vô nghiệm. Do đó bài toán coi như hoàn tất.

Tóm lại, đối với phương pháp liên hiệp với một số, tôi có **một số điểm lưu ý** sau đây:

- Luôn bấm máy để biết nghiệm, bài toán có duy nhất 1 nghiệm, cộng với chứa căn thức độc lập thì thường dùng liên hiệp với một số được.

- Phải thêm bớt số phù hợp, cách làm là thế vào và cộng trừ sao cho nó bằng 0.

- Tuỳ vào loại căn thức mà dùng hằng đẳng thức cho phù hợp.

- Sử dụng điều kiện xác định của biến để chứng minh ngoặc vuông vô nghiệm. Đôi khi còn phải dùng đến bất đẳng thức để đánh giá, điều này tuỳ vào khiếu của mỗi bạn rồi.

- Liên hiệp chỉ dễ thành công với căn thức có dạng $+\sqrt{x+\dots}$ hoặc $-\sqrt{\dots-x}$, còn ví dụ như dạng $-\sqrt{x+1}$ thì chưa chắc liên hiệp với một số được trơn tru. Nếu không ra, các bạn nên nghĩ đến những phương pháp khác.

- Phải bù lại cho đủ những số mà đã thêm vào, như ở ví dụ trên, ta đã thêm vào -4 và +1, tổng cộng là -3, nên phải +3 vào phần phía sau của bài toán, cho huề vốn đó!

Hi vọng các bạn làm chủ được phương pháp này, vì nó tương đối đơn giản.

- Liên hiệp với nhị thức:

Nếu phương trình tương tự những gì chúng ta đã phân tích nhưng vô tình là có 2 nghiệm, thì bạn nên biết mình sẽ phải liên hiệp với nhị thức. Nhị thức là một đa thức có dạng $ax+b$, ví dụ ta có $x+1, 2x-3, -x+2$ là các nhị thức. Dạng này tương đối phức tạp hơn liên hiệp mới một số, nhưng hi vọng các bạn cũng nắm ngọt.

Những cách nhận dạng, cách liên hiệp, xét dấu ngoặc vuông, plapla,... nói chung không khác gì liên hiệp với một số, chỉ là ở bước liên hiệp hơi vất vả chút xíu.

Ta tiến hành xét phương trình sau:

$$x^2-9x+21=\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}$$

Dò nghiệm, ta thấy phương trình có 2 nghiệm là $x=3, x=6$, lại chứa các căn thức độc lập nên ta nghĩ đến phương pháp liên hiệp với nhị thức. Để kĩ càng hơn, ta phân tích một số phương pháp khác xem khả thi hơn hay không.

Nếu là nhân tử chung, ta chưa có 1 căn cứ nào về sự giống nhau giữa các bộ phận của phương trình, đặt ẩn phụ thì cũng không thể, vì x ở trong căn và ở ngoài căn có bậc khác nhau, 2 ẩn phụ cộng với hệ số bất định cũng quá phức tạp. Nên ta suy nghĩ đến phương pháp ưu tiên thứ 3 là liên hiệp, và vì có 2 nghiệm nên liên hiệp với nhị thức.

Định hướng xong, ta tiến hành xử lí bài toán này. Thường thì khi dùng phương pháp liên hiệp, ta chuyển hết các phần của phương trình về một vế, ta có

$$x^2-9x+21-\sqrt{x-2}-\sqrt{7-x}=0$$

Từ đây, ta tiến hành liên hiệp nhị thức:

- Trong phương pháp này ta dùng một chút về phương pháp hệ số bất định, theo đó ta tiến hành đặt như sau: $\alpha x+\beta-\sqrt{x-2}=0; \quad \gamma x+\omega-\sqrt{7-x}=0$.

- Lần lượt thay các giá trị nghiệm $x=3, x=6$ vào từng hệ thức trên. Với hệ thức đầu tiên, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}3\alpha+\beta-1=0\\6\alpha+\beta-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{3}\\\beta=0\end{cases}$$

Tương tự với hệ thức thứ 2, ta có: $\begin{cases} 3\gamma + \omega - 2 = 0 \\ 6\gamma + \omega - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\dfrac{1}{3} \\ \omega = 3 \end{cases}$. Do đó, phương trình gốc được biến đổi thành

$$x^2 - 9x + 18 + \frac{1}{3}x - \sqrt{x-2} + \left(-\frac{1}{3}x + 3\right) - \sqrt{7-x} = 0$$

Bước này giống như bước -4 và +1 ở phương pháp trên, các bạn cố gắn nắm được **qui trình tìm ra các nhị thức** trong trường hợp này. Có vẻ khá ảo nhỉ!

- Tiến hành liên hiệp, các căn là căn bậc 2 nên sẽ dùng hằng đẳng thức như phương trình trên, ta có phương trình tương đương:

$$x^2 - 9x + 18 + \frac{1}{3}x - \sqrt{x-2} + \left(-\frac{1}{3}x + 3\right) - \sqrt{7-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 + \frac{\frac{x^2}{9} - (x-2)}{\frac{1}{3}x + \sqrt{x-2}} + \frac{\frac{x^2}{9} - 2x + 9 - (7-x)}{\left(-\frac{1}{3}x + 3\right) + \sqrt{7-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 + \frac{x^2 - 9x + 18}{9\left(\frac{1}{3}x + \sqrt{x-2}\right)} + \frac{x^2 - 9x + 18}{9\left(-\frac{1}{3}x + 3 + \sqrt{7-x}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 9x + 18\right)\left[1 + \frac{1}{9\left(\frac{1}{3}x + \sqrt{x-2}\right)} + \frac{1}{9\left(-\frac{1}{3}x + 3 + \sqrt{7-x}\right)}\right] = 0$$

- Quá trình liên hiệp đến đây coi như hoàn tất vì dễ thấy với điều kiện của phương trình là $2 \le x \le 7$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn vô nghiệm. Vậy pt có nghiệm...

Có một điểm lưu ý khi các bạn dùng phương pháp này chính là việc xét dấu của các mẫu số sau khi liên hiệp. Với bài toán này, các bạn phải chắc chắn rằng các biểu thức ở mẫu, đó là $\left(\frac{1}{3}x + \sqrt{x-2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{3}x + 3 + \sqrt{7-x}\right)$ luôn khác 0 với mọi x thoả $2 \le x \le 7$, điều này thoả mãn trong trường hợp này. Nhưng nhỡ với bài toán khác, giả sử như có một giá trị, ví dụ $x = 4$ làm cho các mẫu này bằng 0 thì trước khi liên hiệp các bạn phải

kèm thêm một câu “xét $x=4$ là/không là nghiệm của phương trình”. Đó là một bước kiểm tra nghiệm quan trọng, nếu thiếu rất có thể các bạn sẽ bị trừ điểm nặng, hãy chú ý nhé!

Bài này có bước liên hiệp với biểu thức khá xấu nên các bạn thông cảm ^^. Tuy nhiên đó không phải là vấn đề quá nghiêm trọng, mà đôi khi những bài này làm tăng khả năng tính toán và độ “lì” của các bạn hơn nữa. Cần nói thêm về bước tìm nhị thức cần liên hiệp một tí. Nếu như dạng liên hiệp với một số ta mong muốn cộng vào một số sao cho giá trị của căn thức và số đó có tổng bằng 0, nên ý tưởng này được tương tự hoá với dạng nhị thức. Hơi rườm rà hơn ở bước tìm các hệ số bất định, tuy nhiên chỉ cần bình tỉnh, thay từng nghiệm x tương ứng để được 2 phương trình 2 ẩn là các bạn có thể giải quyết được các hệ số này.

Để kết thúc cho một vài hướng suy rộng của pp liên hiệp, tôi xin gởi đến các bạn một bài toán mà tôi cho là khá hay, với ý tưởng liên hiệp xuyên suốt nhưng giấu mình dưới một hình thức lạ mắt hơn. Ta xét pt:

$$(2x-7)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)=5\ \ (1)$$

Bài toán có 2 căn thức, và khi dùng máy thì ta cũng biết được nghiệm của pt là $x=1$ và $x=6$. Do đó, ý tưởng liên hiệp nhị thức loé lên. Tuy nhiên, trắc trở của bài toán này nằm ở 2 chỗ: một là 2 căn thức đang xét có dấu trái nhau, do đó khi liên hiệp sẽ gặp không ít rắc rối, hai là trước 2 căn lại có một biểu thức không chứa căn, là một trong những dạng “kị” của liên hiệp, không phải lúc nào cũng liên hiệp được. Tuy nhiên, ta có thể giải quyết đồng thời 2 vấn đề trên, vẫn dựa vào ý tưởng liên hiệp, đó là **liên hiệp luôn với đối tượng là 2 căn thức.**

Ta thấy rằng: $\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}\right)=3x-2-(x+3)=2x-5$, do đó ta nhân 2 vế của pt cho $\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}\right)$, điều kiện là $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{2}{3}\\x\neq -3\end{cases}$, hệ này vô nghiệm nên $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}\neq 0,\forall x\geq\dfrac{2}{3}$, do đó ta nhân thoải mái, vì lẽ nếu nhân 2 vế pt cho một số bằng 0 là không chặt chẽ. Do đó ta có:

$$(1)\Leftrightarrow(2x-7)(2x-5)=5\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}\right)$$

Đến đây coi như hoàn tất, ý tưởng liên hiệp nhị thức đã sáng tỏ và không còn rào cản nào nữa. Trước các căn có hệ số 5, nên khi đặt hệ số bất định tìm nhị thức, các bạn vẫn nên để số 5 như vậy tính toán bình thường, ví dụ ta đặt $5\sqrt{3x-2}=\alpha x+\beta$, vẫn ra kq.

Qua ví dụ trên, các bạn thấy rằng, một pt tuy có ý tưởng liên hiệp nhưng gặp một trở ngại nào đó, bằng các công cụ hằng đẳng thức, ta cố gắng chuyển nó về dạng liên hiệp được. Đề thi thường chú trọng những bài toán có vài mưu mẹo như thế này.

5. <u>Hiểu hơn về phương pháp hàm số giải phương trình , tương quan giữa một hàm số và một phương trình vô tỉ</u>

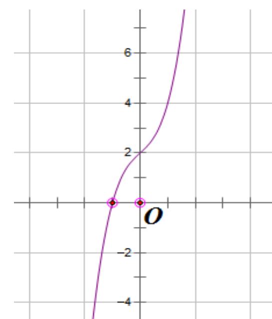
Có lẽ nhiều bạn sẽ thắc mắc chỗ này, tại sao người ta lại đưa ra phương pháp hàm số để giải phương trình, và lại là một phương pháp rất mới, rất hot, công cụ hữu hiệu để giải quyết nhiều bài toán hóc búa, khi mà nhân tử chung, liên hiệp hay đặt ẩn phụ đều đã thất bại, hoặc là không thể giải quyết trọn vẹn được.

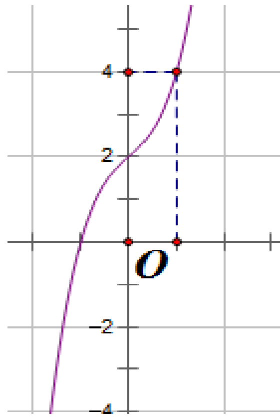
Câu trả lời, theo ý kiến cá nhân tôi, không phải ngẫu nhiên. Các bạn thấy đấy, mọi phương trình đều có thể chuyển về một vế, vế còn lại bằng 0, và chính điều này đã tạo nên sự đặc biệt: phương trình, chính là **một trường hợp riêng của hàm số**, hay nói khác hơn, **nghiệm của phương trình chính là giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành (trục 0x)**. Do đó, phương pháp hàm số đánh giá phương trình được suy ra một cách tự nhiên và hoàn toàn nằm trong chương trình học của các bạn.

Ta xét hàm số sau: $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x+2}-4$, các bạn thấy đó, nếu ta cho $f(x)=0$ thì ta có ngay phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x+2}-4=0$. **Giải pt này cũng chính là tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với trục hoành** $y=0$.

Thật tình, đồ thị hàm số này rất khó vẽ, nhưng về số giao điểm của đồ thị, tạm đặt là đồ thị (C) với 0x thì hoàn toàn tìm được bằng công cụ đạo hàm. Theo đó, ta đã biết:

- Hàm số đơn điệu khi nó **liên tục và đạo hàm bậc nhất $f'(x)$ của nó đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng, đoạn đang xét**. Hàm số đồng biến thì x tăng, y tăng, x giảm, y giảm, hàm số nghịch biến thì x tăng, y giảm và ngược lại. Do đó, với một hàm số đồng biến hoặc nghịch biến thì nó chỉ cắt trục hoành 0x tại một điểm duy nhất.





- Hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) thì tại mỗi điểm có toạ độ x_0 đang xét, **chỉ tồn tại duy nhất** một giá trị $f(x_0)$ (hoặc y_0) tương ứng. Đây chính là cơ sở cho pp hàm số dạng $f(u)=f(v)$, từ đây hi vọng các bạn hiểu rõ hơn tại sao khi hàm f đơn điệu và $f(u)=f(v)$ thì ta có thể suy ra $u=v$ như đã trình bày. Ta xét trường hợp còn lại, **giả sử hàm số f không đơn điệu hoặc các bạn không thể chứng minh được nó đơn điệu**, thì việc suy ra như trên có được hay không? Câu trả lời là không. Ta hiểu như thế này, việc $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi u và v thực chất là một điểm x_0, các bạn cần hiểu u,v thực chất là những biểu thức chứa biến, **là các đa thức** chứ không phải là một số thực nào đó. Do đó, mặc dù u,v biểu diễn những biểu thức đại số khác nhau, nhưng nó cùng là một điểm x_0 nào đó trên trục hoành. Nếu hàm số f không đơn điệu, thì có thể sẽ tồn tại 2 giá trị x_1,x_2 khác nhau cho cùng một giá trị của f. Ví dụ, hàm số $f(x)=x^3-3x$ là hàm số không đồng biến trên toàn miền $\mathbb{R}$, do đó ta tìm được 2 giá trị $x=-1,x=2$ cho cùng một giá trị f là 2, tức là $f(-1)=f(2)=2$. Giả sử điều ta nói phía trên là đúng, thì từ $f(-1)=f(2)\Rightarrow -1=2$. Điều này vô lí. Đó là nguyên nhân vì sao điều tối quan trọng trong phương pháp hàm số sử dụng hàm đại diện này các bạn phải chứng minh được hàm số đại diện là hàm đơn điệu.

Nói tóm lại, pp hàm số giải phương trình chính là một bước phát triển dựa vào sự tương quan giữa phương trình và hàm số. Do đó, bằng công cụ đạo hàm, ta hoàn toàn có thể suy ra **số nghiệm tối đa** của một phương trình dựa vào tính chất của đạo hàm cấp 1, cấp 2, sau đó bằng máy tính bấm dò nghiệm và điền vô, kết thúc bài toán. Về pp này hiện nay rất phát triển và có rất nhiều sách trên thị trường nói về nó, các bạn có thể tìm hiểu thêm các dạng bài tập, rất phong phú và đa dạng.

6. Một số hướng tách hàm số đưa về dạng hàm số đặc trưng $f(u)=f(v)$

Có thể nói, hiện nay phương pháp hàm số là một công cụ hot trong giải toán phương trình, hệ phương trình. Rất nhiều bài toán được thiết kế dựa trên các kiến thức có liên quan đến hàm số cũng như đạo hàm. Vì thế, không loại trừ khả năng câu điểm 9 trong những năm tới sẽ là một câu thuần tuý giải tích, về tính chất nghiệm của đa thức hay là một bài toán thực tế dùng kiến thức dãy số, và bài toán giải phương trình bằng tư duy hàm số cũng là một vấn đề hết sức nhạy cảm.

Về phương pháp hàm số này, điều quan trọng là các bạn phải tìm ra được một hàm số đại diện cho 2 vế của phương trình. Hàm số f được gọi là **hàm số đại diện** khi: nếu ta thay biến u (biến ở đây có thể hiểu là một đa thức tuỳ ý) vào f thì ta có 1 vế của phương trình, thay biến v vào f thì được vế còn lại. Ví dụ ta có hàm số đại diện:

$f\left(t\right)=t^2+2t-3$, vậy nếu ta thay $t=x$, tức biểu thức u lúc này là x, ta có một hàm số $f\left(x\right)=x^2+2x-3$, còn nếu ta thay $t=\sqrt{x+1}$, ta có một hàm số theo biến $\sqrt{x+1}$ là:
$f\left(\sqrt{x+1}\right)=x+1+2\sqrt{x+1}-3=x-2+2\sqrt{x+1}$

Khi đó nếu ta cho $f\left(x\right)=f\left(\sqrt{x+1}\right)$ thì ta được một phương trình hoàn chỉnh có thể giải bằng phương pháp hàm số - hàm đại diện là:

$x^2+2x-3=x-2+2\sqrt{x+1}$ hay rút gọn ta có phương trình: $x^2+x-1-2\sqrt{x+1}=0$

Tóm lại: **các bước giải một phương trình bằng hàm số đại diện** là:

- Cô lập về 2 vế của phương trình sao cho xuất hiện dáng vấp của một hàm số chung. Bước này chính là bước quyết định.

- Bằng công cụ đạo hàm, chứng minh hàm số đã cho đồng biến hoặc nghịch biến trên một khoảng, một đoạn xác định nào đó.

Nhìn chung, khá nhiều bài nếu dùng hàm số được thì liên hiệp được. Do đó, trong một số trường hợp, nếu việc tách hàm số nhưng không thể chứng minh hàm số đồng biến hay nghịch biến trên một miền xác định nào đó thì có thể quay trở lại dùng phương pháp liên hiệp như đã trình bày ở phần trước.

Trong phần này, tôi xin đề cập đến một số hướng tư duy tách hàm số mà tôi hay nghĩ tới và sử dụng:

- Dạng 1: Tách hàm số dựa trên tương quan giữa biểu thức trong căn và biểu thức bên ngoài dấu căn có liên quan với nó

Đây là một dạng tương đối hay gặp trong phương pháp hàm số này. Khi đó, đề bài có dạng giống như ví dụ tôi đã từng đưa ra trong lúc phân tích pp hàm số ở phần trước. Ta xét một phương trình sau:

$$\left(x+2\right)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$$

Ta vẫn trung thành với các bước giải một phương trình, nhập máy tính tìm nghiệm, ta tìm được một nghiệm duy nhất là $x=-1$. Tiếp theo, tiến hành phân tích từng phương pháp. Đặt nhân tử chung xem ra không hiệu quả khi các bộ phận không có dấu hiệu của một hằng đẳng thức nào và tương đối khác nhau, đặt ẩn phụ 2 căn thức cũng xem ra không hiệu quả khi bậc của biến x ở trong căn và ngoài căn là khác nhau. Liên hiệp, có thể được, nhưng sẽ rất khó khăn trong việc xử lí các biểu thức kéo theo sau liên hiệp. Ta phân tích phương pháp hàm số. Như đã nói, dùng hàm số phải có sự tương tự nhau ở dạng của các phần của phương trình. Ở đây, bằng tư duy hàm số, ta chuyển 2 tích về 2 bên của phương trình, nên pt đã cho tương đương:

$$(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)=-x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)$$

Trong căn thứ 2, ta thấy có sự giống nhau giữa các biến, nếu ta biến đổi thành $-x\left(\sqrt{(-x)^2+3}+1\right)$, ta thấy ngay có sự liên hệ khi $-x$ ở ngoài căn được liên hệ với $-x$ ở trong căn, do đó ta có cơ sở hàm số đại diện ở đây có thể là $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$. Ta tiếp tục khám phá xem hàm số mà ta vừa suy nghĩ ra **có áp dụng được với vế trái hay không**. Các bạn lưu ý, trong phương pháp này thì các hằng đẳng thức luôn đóng một vai trò hết sức quan trọng. Từ căn thức đầu tiên, ta có thể chuyển thành $\sqrt{(x+2)^2+3}$, do đó vế trái có thể viết lại $(x+2)\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right)$, điều này hợp lí với hàm số ta nghi ngờ, vì nếu thay $t=x+2$, ta có ngay vế trái. Do đó phương trình đã cho có thể giải được bằng phương pháp hàm số. Bằng những gì đã phân tích, ta có bài giải:

Phương trình đã cho tương đương:

$(x+2)\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right)=-x\left(\sqrt{(-x)^2+3}+1\right)$, với $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$.

$\Leftrightarrow f(x+2)=f(-x)$

Xét hàm số $f(t)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f'(t)=\sqrt{t^2+3}+1+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, từ $f(x+2)=f(-x)\Rightarrow x+2=-x\Leftrightarrow x=-1$.

Bài giải cho một bài toán dùng hàm số có khuôn dạng tương đối đẹp mắt trong trình bày. Tuy nhiên, một điểm lưu ý nữa là **miền xác định của hàm số** $f(t)$ đang xét phải là **hợp của tập xác định** của biến x ở cả 2 vế của phương trình. Một lưu ý khác nữa là chỗ đánh giá $f'(x)$, nhiều bài toán cho $f'(x)$ không rõ dấu như ví dụ này nên các bạn không được đánh bừa dấu mà phải chứng minh nó **âm hay dương.** Điều tối quan trọng của phương pháp chính là phải chứng minh được $f'(x)>0$ hoặc $f'(x)<0$ thì bài toán mới thành công được. Hi vọng các bạn nắm được một phần nào đó hoặc toàn bộ phương pháp này, bên cạnh đó là phát triển thêm, tìm hiểu thêm những loại phương trình với hình thức lạ, khác biệt có thể dùng nó. Cơ bản là phương trình phải qui về 2 vế với dạng hàm số giống nhau, không giống được là thua ^^.

Xin tặng các bạn một bài toán tương tự, nhưng đòi hỏi khéo léo biến đổi một chút xíu:

Giải phương trình: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x-2)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)=0$

Bài này tương đối không quá khó nhưng có một mẹo được ghải tương đối hay ở tích 2 ngoặc tròn thứ 2. Vẫn theo trình tự như bài toán trên, các bạn sẽ làm được bài này. Đáp số thì thôi khỏi cung cấp đi nhé, casio đã ở bên bạn và sẵn sàng cho bạn đáp án chính xác nhất ^^.

Ví dụ ở trang 31 cũng là một điển hình cho dạng này. Tóm lại, ý tưởng chung là ta đưa **biểu thức ở bên trong dấu căn và biểu thức gắn với dấu căn** về những dạng tương đồng nhau, sau đó suy đoán hàm số đại diện và xét xem vế còn lại có biểu diễn theo hàm số đại diện đó được không.

- Dạng 2: Suy hàm số đại diện từ dạng căn thức – số mũ của phương trình

Như đã nói, phương trình dùng pp hàm số thường có số mũ của các phần tử như nhau, hay nói cách khác, thường tồn tại song song trong phương trình các hạng tử như $x^2 \leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2$**,** $2x^3 \leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^3$. Đó chính là dấu hiệu dễ nhận biết nhất khi giải pt.

Ta xét phương trình sau:

$$x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$$

Vẫn như truyền thống, ta tìm được phương trình có nghiệm $x=5, x=0,618\ldots\ldots, x=-0,618\ldots$ Cứ mặc kệ, ta xét từng phương pháp xem sao.

Rõ ràng đặt nhân tử chung rất khó, đặt ẩn phụ cũng khó khi bậc của x trong và ngoài căn là khác nhau, ta còn liên hiệp và xét hàm số. Liên hiệp căn bậc 3 coi bộ khá gay go, tuy nhiên bằng chức năng table của máy tính, có thể dò được đa thức chứa 3 nghiệm đó, các bạn thử liên hiệp với chúng xem sao. Cách khả dĩ nhất có lẽ là dùng hàm số, nhưng dùng theo cách nào cho hợp lí vì bài này coi bộ khá lạ mắt so với những bài ta từng xét.

Bài này có thể dùng phương pháp hệ số bất định, nhưng về mặt tư duy mà nói thì có lẽ không được rõ ràng cho lắm. Xét đa thức ở vế trái, ta thấy chứa x^3, do đó, nếu muốn có dạng hàm số giống nhau thì bên vế phải cũng phải xuất hiện một "cái gì đó" mũ 3, có thể là căn thức mũ 3 lên vì căn đã cho là căn bậc 3 nên khi mũ 3 sẽ mất căn, ta có $\left(\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\right)^3 = 7x^2+9x-4$. Các bạn thấy rằng, để có được $7x^2+9x-4$ thì phải lấy từ bên vế trái, do đó phương trình đã cho được viết lại:

$$x^3+3x^2+4x+2 = 7x^2+9x-4+\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$$

Vô tình bên vế trái ta lại có dạng hằng đẳng thức: $x^3+3x^2+4x+2=\left(x+1\right)^3+x+1$

khi đó pt trở thành $\left(x+1\right)^3+x+1=7x^2+9x-4+\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$, dáng dấp hàm số đại diện đã rõ, đó là $f\left(t\right)=t^3+t$. Coi như bài toán được giải quyết.

Cách mà chúng ta suy nghĩ vô tình lại trùng với ý đồ của tác giả, song, nhiều bài toán buộc ta phải dùng công cụ hệ số bất định. Ở pt này, ý tưởng là vế trái đã có x^3 nên chắc chắn sẽ đưa được về một biểu thức nào đó chứa mũ 3, chẳng hạn $x^3, \left(x+1\right)^3, \left(x+2\right)^3, ...$ do đó ta ý tưởng tạo "cái gì đó" mũ 3 ở vế phải để tạo nên sự tương đồng về mặt hàm số ở 2 vế của pt. Vô tình khi mũ 3 căn thức và dung hoà 2 vế thì hàm số đã hiện diện. Tuy nhiên, bài toán sau đây sẽ có phần phức tạp hơn một chút, nhưng vẫn với tư duy vừa nêu:

$$\left(x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=\left(x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)$$

Bài này được trích một phần đề thi THPT Quốc Gia 2015, dò nghiệm ta thấy một nghiệm xấu $x=3{,}3027...$ Với nghiệm này, cùng với chức năng Table của máy tính Casio, ta có thể tìm ra đa thức nhân tử chung, và ý tưởng giải theo liên hiệp. Các bạn nào có nghiên cứu phần này thì hãy thử sức với hướng đó xem sao nhé! Còn ở đây, ý

đồ hàm số đã tương đối rõ ràng, khi ta thấy có dạng quen thuộc $(x+4)\sqrt{x+2}$ và bên vế phải cũng có x^3, nên ta khai triển tung toé cả ra, phương trình tương đương:

$$(x+4)\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5$$

Vì bên vế phải có x^3 nên ý tưởng của ta là biểu diễn một "cái gì đó" mũ 3 bên vế trái. Đây là một dạng rất quen thuộc mà tôi đã từng đề cập với các bạn ở phần trước. Ta tách biểu thức ở ngoài dấu căn sao cho giống với một phần, hoặc giống hoàn toàn biểu thức trong dấu căn. Do đó, ý tưởng của ta tách $(x+4)\sqrt{x+2}$ thành $(x+2+2)\sqrt{x+2}$ $=(x+2)\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+2}=\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2\sqrt{x+2}$. Tới đây, "cái gì đó" mũ 3 mà ta cần đã xuất hiện. Ta thấy vế trái trở thành dạng hàm số $f(t)=t^3+2t$. Ta xét xem vế phải **có biểu diễn được thành một dạng hàm số tương tự như vậy được không?** Bằng kĩ thuật hệ số bất định, ta hi vọng tìm được một số α thoả mãn hàm số $f(t)$. Do đó ta xét:

$$\begin{aligned}&x^3-x^2-x-5=(x+\alpha)^3+2(x+\alpha)\\&\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5=x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3+2x+2\alpha\\&\Leftrightarrow x^3-x^2-x-5=x^3+3x^2\alpha+\left(3\alpha^2+2\right)x+\alpha^3+2\alpha\end{aligned}$$

Để hệ thức trên đúng thì các hệ số ở hai vế phải bằng nhau (đây được gọi là **đồng nhất hệ số**), do đó, số α cần tìm phải thoả hệ sau:

$$\begin{cases}-1=3\alpha\\-1=3\alpha^2+2\\-5=\alpha^3+2\alpha\end{cases}.$$

Rõ ràng không có số α nào thoả hệ này. Do đó cách tách của chúng ta như trên xem như thất bại. Vậy, ta phải tìm một hàm số khác phù hợp hơn.

Để ý rằng, hàm số ở VT của chúng ta còn khuyết đi một hạng tử bậc 2, có dạng $\beta(x+2)$, với β là một số thực nào đó. Do đó, ta có thể hi vọng tách hàm số được theo hướng này. Phương trình có thể viết như sau.

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\beta\left(x+2\right)+2\sqrt{x+2}=\left(x+\alpha\right)^3+\beta\left(x+\alpha\right)^2+2\left(x+\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2\sqrt{x+2}=x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3+\beta x^2+2\alpha\beta x+\beta\alpha^2+2x+2\alpha-\beta x-2\beta$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2\sqrt{x+2}=x^3+\left(3\alpha+\beta\right)x^2+\left(3\alpha^2+2\alpha\beta+2-\beta\right)x+\alpha^3+2\alpha-2\beta+\beta\alpha^2$$

(với α,β là các hệ số bất định mà ta đặt vào để đi tìm).

Đối chiếu với phương trình gốc $\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2\sqrt{x+2}=x^3-x^2-x-5$ và đồng nhất hệ số, thì hệ số α,β phải thoả hệ sau:

$$\begin{cases}3\alpha+\beta=-1\\3\alpha^2+2\alpha\beta+2-\beta=-1\\\alpha^3+2\alpha-2\beta+\beta\alpha^2=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=2\end{cases}$$

Các bạn chú ý rằng, khi giải các hệ pt tìm hệ số bất định thì **không nhất thiết phải tìm được tất cả các nghiệm** của α,β mà điều cần thiết là **tìm nghiệm đẹp** để dễ dàng thay vào phương trình còn lại xử lí. Hai hệ số này mà không đẹp thì coi như bài toán rất khó giải quyết. Xong! Thay giá trị α,β và phương trình mà ta đã đặt hệ số. Ta có phương trình tương đương: $\left(\sqrt{x+2}\right)^3+2\left(x+2\right)+2\sqrt{x+2}=\left(x-1\right)^3+2\left(x-1\right)^2+2\left(x-1\right)$

Từ đây thì dạng hàm số coi như đã rõ ràng, đó là $f\left(t\right)=t^3+2t^2+2t$. Hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên công việc còn lại của các bạn là hết sức đơn giản.

Từ pt trên, có 2 câu hỏi đặt ra:

- Tại sao chúng ta lại biết VP của phương trình lại có dạng $x+\alpha$ như vậy? Đó là do x^3 có thể biểu diễn theo nhiều biến thể, có thể là $x^3,\left(x+1\right)^3,\left(x-1\right)^3$ mà điều này tôi cũng đã có nhắc đến. Nên để biểu diễn một cách tổng quát, các bạn nên đặt một hệ số bất định, ở đây là α , để suy ra dạng mình mong muốn.

- Tại sao chúng ta lại biết mà thay hẳn số 2 ở $2\left(x+\alpha\right)$ ở vế phải? Đó là do để có dạng hàm số giống nhau ở cả 2 vế của pt, mà vế phải lại có dạng $2\sqrt{x+2}$ nên vế trái ta cũng phải có dạng $2\left(x+\alpha\right)$.

Qua những ví dụ trên, có thể thấy rằng, bước tách hàm số đại diện là quan trọng nhất trong giải một bài toán pt bằng pp hàm số. Do đó, đòi hỏi các bạn phải vận dụng nhiều cách khác nhau và một chút nhạy bén trong cách nhận diện hàm số, cách tách mũ,... để đưa về một hàm số đại diện ở cả 2 vế của pt.

- Dạng 3: Biến đổi phương trình chưa có dạng hàm số về dạng hàm số

Dạng này khó hơn nhiều. Vì màu sắc hàm số không được biểu hiện rõ ràng mà phải trải qua nhiều bước trung gian để tạo ra nó.

<u>Tạo hàm số bằng phương pháp chia 2 vế của phương trình cho một số, một biểu thức</u>

Tôi đã từng cung cấp cho các bạn một ví dụ có màu sắc của phương pháp chia này, bài toán nằm ở trang 36. Về cơ bản, đó là một ý tưởng cho những bài toán cùng dạng, khi nhìn vào pt mà ta có cảm giác nó "thừa" đi một cái gì đó. Phép chia cho một số hay một biến, một biểu thức rất hiệu quả trong lớp bài toán như thế.

Ta xét ví dụ sau:

$$3x^3+4x^2-1=x\sqrt[3]{x^3+2+\frac{1}{x}}$$

Theo trình tự phương pháp giải một pt nhé, bấm nghiệm ta thấy có 1 nghiệm đẹp $x=-1$ và 2 nghiệm xấu là $x=0,577..,x=-0,577..$. Từ những nghiệm này, và dạng pt, ta xét dần dần 5 phương pháp đã nêu. Các bạn tự đánh giá. Ở đây, ý tưởng dùng hàm số chưa mấy rõ ràng, nhưng ta nhận thấy biến x phía trước căn thức. Điều này làm ta suy nghĩ đến 2 khả năng: một là tích $x\sqrt[3]{x^3+2+\frac{1}{x}}$ thuộc một hằng đẳng thức $(a+b)^2$ nào đó và nó đóng vai trò là $2ab$. Khả năng này dễ xảy ra hay không? Rất khó, vì căn là căn bậc 3 nên khi bình phương dạng b^2 cũng không thể phá căn được, hai là ta chia 2 vế của pt cho x để khử mất biến này luôn, từ đó chỉ còn lại căn bậc 3 và dễ dàng xử lí hơn. Bằng ý tưởng đó, ta biến đổi pt thành: $3x^2+4x-\frac{1}{x}=\sqrt[3]{x^3+2+\frac{1}{x}}$

Căn là căn bậc 3, nên nếu như có dạng hàm số, thì có thể là dạng $f(t)$ có bậc 3, khi ta phá căn thức đó, mũ 3 căn thức ta được $x^3+2+\frac{1}{x}$. Phần hạng tử này đã có được $\frac{1}{x}$ lấy

từ VT. Do đó ta thử biến đổi pt thành: $x^3+3x^2+4x+2=x^3+2+\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x^3+2+\frac{1}{x}}$. Thật may mắn, khi ý tưởng của ta đã vô tình tạo ra bên VT một hằng đẳng thức đẹp là $x^3+3x^2+4x+2=(x+1)^3+x+1$. Do đó ta có: $(x+1)^3+x+1=x^3+2+\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x^3+2+\frac{1}{x}}$.

Đến đây, dạng hàm số coi như đã được lộ diện.

Qua phân tích pt trên, ta thấy rằng, kĩ thuật chia 2 vế cho một số, một biến hay một biểu thức phải trải qua quá trình phân tích những khả năng có thể xảy ra đối với biểu thức cần chia. Nhưng thông thường, khi đã làm bài tập quen, gặp các bài toán dạng này các bạn sẽ có ý tưởng chia ngay, lí do là vì sẽ xuất hiện $\frac{1}{x}$ giống trong căn, tạo ra các phần giống nhau là ý tưởng đặt ẩn phụ tốt. Song, những bài toán có căn và bậc như thế này hay rơi vào dạng hàm số nhiều hơn. Hi vọng qua quá trình luyện tập, các bạn sẽ có cái nhìn sâu hơn với những dạng toán khác nhau.

Vì bài viết chỉ nhằm mục đích giới thiệu những kinh nghiệm tôi tích luỹ được nên sẽ không có nhiều bài toán. Vì thế, các bạn chịu khó rèn luyện thêm những bài toán khác ở sách tham khảo, sách đọc thêm nhé ^^.

<u>Đặt ẩn phụ đưa phương trình về dạng hàm số</u>

Những bài toán này theo tôi nghĩ là khá khó. Ý tưởng cơ bản dựa trên sự phối hợp giữa 2 phương pháp là đặt ẩn phụ và hàm số. Ta xét phương trình sau:

$$\sqrt[4]{x^2-2x+2}=3x+1+\sqrt{x+2}$$

Một pt có thể thấy không hề đơn giản. Bằng máy tính ta nhẩm được pt có nghiệm $x=-\frac{1}{3}$. Với nghiệm thế này, ta có thể nghĩ đến nhiều phương pháp. Tuy nhiên, đặt ẩn phụ và liên hiệp xem ra khó có khả năng. Với liên hiệp, có một ý nghĩ táo bạo hơn những dạng thông thường, đó là chuyển 2 căn thức về cùng một vế sau đó liên hiệp với đối tượng là 2 căn luôn. Cách này dành cho các bạn. Ta xét pp đặt ẩn phụ. Tại sao ta nghĩ đến ẩn phụ? Trong khi bậc của x ở trong và ngoài căn có vẻ lệch nhau. Nhưng như thế này, nếu để ý kĩ, sự khác nhau nằm ở căn bậc 4, mà theo như ta suy nghĩ đơn giản thì $\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}$, “đồng dạng” với căn bậc 2 còn lại và bậc của x cũng giống với x ngoài căn. Do đó, ta ý tưởng dùng pp đặt ẩn phụ 2 căn thức xem sao.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[4]{x^2 - 2x + 2} \\ b = \sqrt{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = x^2 - 2x + 2 \\ b^4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$

Ta tìm cách biểu diễn phần còn lại là $3x+1$ theo a^4 và b^4, bằng kĩ thuật hệ số bất định, điều này không quá khó khăn. Các bạn tự thực hiện nhé. Qua đó ta tìm được hệ thức $3x+1 = \dfrac{b^4 - a^4}{2}$. Pt đã cho được viết lại theo 2 biến mới a,b: $a = \dfrac{b^4 - a^4}{2} + b$ $\Leftrightarrow a^4 + 2a = b^4 + 2b$. Đến đây thì ý tưởng hàm số là tương đối rõ ràng. Các bạn xử lí phần còn lại nhé.

Sẽ có thắc mắc là tại sao ta lại mũ 4 hai biến a,b như trình bày. Lí do là để các biểu thức thoát căn hoàn toàn, mà phần còn lại là $3x+1$ lại đòi hỏi điều đó.

Nhìn chung, loại pt này đòi hỏi kết hợp nhiều pp khác nhau nên các bạn chịu khó tìm thêm nhiều bài toán khác luyện tập. Những thứ tôi trình bày chỉ là những mánh khoé, những nền tảng nhỏ trong pp giải, còn các pt thì luôn biến tấu rất khó lường. Cố lên!

7. <u>Một số phương pháp giải phương trình khác</u>

Riêng pp đánh giá thì tôi xin dành cho các bạn tự mình nghiên cứu và khám phá, vì nó có liên quan đến phần bất đẳng thức, một trong những mảng khó nhất của toán sơ cấp. Trong phần này, tôi chủ yếu đề cập đến 2 pp tuy ít gặp, nhưng lại có hiệu quả rất cao trong một số dạng phương trình đặc thù: pp tách tổng bình phương và pp lượng giác hoá.

- PP1: Phương pháp tách tổng bình phương

Các bạn để ý rằng, một pt có dạng $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi các biểu thức A,B,C phải **đồng thời bằng 0**. Ví dụ, ta có dạng pt sao:

$$\left(x^2 - 2x - 3\right)^2 + \left(x-3\right)^2 + \left(x^2 - 4x + 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x - 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Từ đó, sinh ra pp tách tổng bình phương. Nội dung pp cũng tương tự như bài toán ta vừa xét, tức là từ một pt đã cho, có thể tách thành tổng các bình phương, khi đó pt có nghiệm khi và chỉ khi từng biểu thức bằng 0. Ý tưởng tương đối đơn giản, nhưng dạng này khá bó hẹp và chỉ xuất hiện ở một số pt và rất hiếm gặp.

- PP2: Phương pháp lượng giác hoá

"Lượng giác hoá", nghĩa là từ một pt đại số, ta chuyển nó thành pt lượng giác và giải theo phong cách lượng giác thuần tuý.

Cũng giống như pp tách tổng bình phương, pt giải bằng lượng giác hoá không thường gặp, nhưng pt dạng này thường có một số đặc điểm nhận biết: trong pt có các dạng căn $\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2}, \sqrt{a^2+x^2}, \ldots$ và còn nhiều dạng căn thức khác nữa. Nguồn gốc của chúng xuất phát từ các công thức lượng giác quen thuộc như: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $1+\tan^2 \text{x}=\frac{1}{\cos^2 \text{x}}$,... Từ đó, tuỳ vào mỗi bạn có thể tìm ra nhiều dạng công thức lượng giác khác mà áp dụng vào, dựa trên tư duy sau:

. Với $\sqrt{a^2-x^2}$, với a là số thực cho trước tuỳ ý, ta đặt:

$x=|a|\sin t \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t$. Để khai căn được dễ dàng và không mất tính tổng quát, ta kẹp điều kiện $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, để $\cos t\ge 0$.

. Với $\sqrt{x^2-a^2}$, ta đặt $x=\frac{|a|}{\cos t} \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=a\tan t$

Vì $\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}$ nên để $\tan t>0 \Rightarrow t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

. Tương tự với $\sqrt{a^2+x^2}$, các bạn tự suy ra công thức để đặt cho thích hợp nhé!

Áp dụng với bài toán sau, giải pt:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$$

Ta tìm được nghiệm của pt là $x=0,5; x=1$. Ta tiến hành tìm pp giải cho pt này. Có vẻ bình phương 2 vế được, nhưng qua lần bình phương thứ nhất thì x lên đến bậc 4, có vẻ khá khó khăn. Đặt ẩn phụ cũng khó, vì x trong căn và ngoài căn có bậc khác nhau. Để ý thấy pt có căn thức $\sqrt{1-x^2}$ là dạng lượng giác quen thuộc $\sqrt{a^2-x^2}$, với $a=1$. Nên ta có cơ sở để giải pt theo pp lượng giác hoá.

Đặt $x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, lại có điều kiện pt $0\le x\le 1\Rightarrow t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, pt trở thành

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\sin t\left(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}\right)$$

Ta thấy rằng, từ một pt căn thức vô tỉ, ta đã chuyển về một pt lượng giác tương đương với nó. Từ đây, việc giải pt ban đầu là việc giải pt lượng giác ta vừa suy ra, do đó các bạn được quyền sử dụng thoải mái các công thức lượng giác. Giải tiếp, ta có pt tđ:

$\sqrt{1+\cos t}=\sin t\left(1+2\cos t\right)$

$\Leftrightarrow 1+\cos t=\sin^2 t\left(1+2\cos t\right)^2$

$\Leftrightarrow 1+\cos t=\sin^2 t+4\sin^2 t\cos t+4\sin^2 t\cos^2 t$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 t\cos t\left(1+\cos t\right)-\cos^2 t-\cos t=0,\left(\sin^2 t=1-\cos^2 t\right)$

$\Leftrightarrow \left(1+\cos t\right).\cos t\left[4\sin^2 t-1\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 t=\frac{1}{4}\\ \cos t=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=\frac{1}{2}, vi` \sin t\ge 0\\ \sin t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ t=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ t=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vì $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nên ta nhận các nghiệm $t=\frac{\pi}{6},t=\frac{\pi}{2}$, do đó $x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},x=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Chắc sẽ có bạn thắc mắc tại sao khi suy ra $\sin t=1,\sin t=\frac{1}{2}$ rồi không kết luận x luôn?

Câu trả lời là do các pt lượng giác như trên chỉ suy ra được **tập nghiệm gồm nhiều nghiệm nhỏ khác nhau**, và các nghiệm này nói chung không thoả $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, bởi lẽ khi giải pt lượng giác thì còn lại số nguyên k, **với mỗi k lại có một nghiệm khác nhau**, nên ta phải tìm 1 số k thoả mãn miền của t, sao đó thế lại sint rồi mới kết luận được.

Một số dạng căn thức khác, nếu có thời gian các bạn tìm hiểu thêm ở sách tham khảo. Tư duy cơ bản của pp này là đưa về pt lượng giác để "dễ nuốt" hơn vì có nhiều công thức lượng giác để biến đổi. Và ý tưởng đặt căn thức chủ yếu dựa trên các công thức

lượng giác quen thuộc. Càng biết nhiều công thức lượng giác thì việc đặt ẩn này càng dễ dàng hơn.

8. Rút nhân tử chung dựa trên tính đẳng cấp của phương trình

Ta nói một chút về pt đẳng cấp, pt đẳng cấp là pt có dạng, ví dụ: $aA^2 + bAB + cB^2 = 0$, với a, b, c là các hệ số, A, B, C là các biểu thức cùng bậc. Qui chung lại, pt đẳng cấp chứa các hạng tử là những biểu thức có cùng bậc, ví dụ: $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$. Tất nhiên, với một pt 2 ẩn thì ta không thể nào tìm được rõ ràng giá trị của 2 ẩn được, mà ta chỉ rút được quan hệ giữa chúng. Cách tìm quan hệ giữa x, y là ta chia 2 vế của pt cho x^2 hoặc y^2, sao đó giải pt bậc 2 theo biến $\frac{y}{x}$ hoặc $\frac{x}{y}$. Áp dụng cho ví dụ trên, ta thực hiện chia 2 vế của pt cho y^2, ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} - 3 = 0$ (trước khi chia, ta xét trường hợp $y = 0$ và suy ra x, vì theo lẽ, pt chỉ tương đương khi chi cho một số hay một biểu thức khác 0). Ta coi pt thu được là pt theo $\frac{x}{y}$, giải ra ta được $\frac{x}{y} = -1$ hoặc $\frac{x}{y} = 3$, hay $x = -y$ hoặc $x = 3y$. Vì vậy, pt ban đầu có thể biểu diễn: $(x+y)(x-3y) = 0$. Đây chính là cách tách nhân tử từ pt đẳng cấp đã xuất hiện trong câu IX của đề thi THPT Quốc gia 2016. Một ý tưởng hay dựa trên một kiến thức ít sử dụng trong việc giải pt, vì có thể các bạn đã gặp phương pháp này nhiều hơn trong việc giải hệ pt.

9. Đối với bài toán bất phương trình

Tôi không tách bất phương trình thành một phần riêng, vì theo tôi thấy thì việc giải bất pt cũng tương tự như việc giải pt, chỉ thay đổi dấu "=" thành dấu khác nó thôi. Để giải một bài toán bất pt, cũng có 5 pp giống như giải pt, và các kĩ thuật kéo theo hoàn toàn tương tự. Nhưng cái khó là các bạn **phải đảm bảo qui tắc về dấu khi xử lí**. Một vài lưu ý khi giải bất pt:

- Khi chia 2 vế của bất pt cho một số, một biểu thức, tất nhiên là khác 0, phải xét xem nó **âm hay dương**, nếu âm phải đổi chiều dấu bất pt (tạm gọi vậy), nếu dương thì giữ nguyên.

- Khi tách được nhân tử, **phải lập bảng xét dấu**, tìm ra các khoảng dương, âm của bất pt. Qui tắc này chắc bạn nào cũng được học trong chương trình đại số 10.

Ngoài ra thì cũng chẳng khác gì bài toán pt. Điều đặc biệt là khi giải bất pt, đừng có tư tưởng sợ dấu của nó, hãy nghĩ nó là dấu "=" sẽ dễ làm hơn. Tuy nhiên nên nhớ khi giải xong phải xét dấu âm dương của biểu thức lại để đánh giá tập nghiệm cho đúng, chứ nếu không là nó "bằng" mình luôn ^^.

Một lưu ý nho nhỏ trong việc **sử dụng pp hàm số để giải bất pt**: ta đã biết, nếu pt có dạng $f(u)=f(v)$ với f là hàm đơn điệu trên miền xác định K nào đó thì ta có quyền suy ra $u=v$. Mở rộng, nếu hàm số $f(u)\ge f(v)$ và:

- f là hàm số đồng biến trên miền xác định K thì ta suy ra $u\ge v$

- f là hàm số nghịch biến trên miền xác định K thì ta suy ra $u\le v$

Có thể kết thúc phần pt ở đây nhé. Tạm thời chưa nghĩ ra nhiều phương pháp khác nhưng cơ bản là dựa trên 5 pp tôi đã nêu và một số lưu ý trong kĩ thuật giải. Tuy nhiên, đối với một bài toán pt "thực sự", sẽ không chỉ phải dùng 1, mà đôi khi là 2, 3 pp cùng một lúc mới xử gọn được bài toán. Quan trọng các bạn phải gây dựng được những cơ sở định hướng ban đầu, tìm xem cách nào có thể làm được trước, để sau đó nếu có phát sinh thêm một số pt nào khác thì định hướng tiếp. Tôi thường sử dụng biện pháp giải quyết từng phần như thế, đến đâu tìm hướng giải quyết đến đó. Xoay quanh 5 pp thôi, đừng nản chí, hãy cố gắng lên.

Còn một số pt bậc 3, bậc 4, pt có dạng đặc biệt khác có cách giải riêng, các bạn tìm hiểu thêm trên mạng hoặc trong sách nhé. Những pt đó hầu như có khuôn và cứ theo tuần tự sẽ giải được ngay.

KINH NGHIỆM XỬ LÍ BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Giải pt đã khổ, giải một hệ pt còn khổ hơn. Tuy nhiên, cốt lõi của bài toán hệ pt là qui hệ thành pt, tức là chuyển hệ pt ban đầu về một pt để xử lí. Có thể nói, hướng tư duy với hệ phương trình là rất phong phú, nhưng thường trong một hệ, sẽ có một pt mà bạn có thể rút được quan hệ x, y, rồi thay vào pt còn lại giải pt bình thường. Một số ít hệ khác thì phải kết hợp giữa 2 pt trong hệ mới giải quyết được. Các hệ này thường rất khó. Trong phần này, tôi sẽ chú trọng đề cập đến một số pp để rút quan hệ x, y, phần việc giải pt còn lại thì cứ dựa vào những gì chúng ta đã phân tích ở phần trước mà xử lí. Các bước tiếp cận bài toán hệ pt gồm:

- Xem xét, đặt điều kiện xác định cho biến x, y.

- Tìm cách tiếp cận, có thể là xem pt nào có thể rút được quan hệ x, y thì lấy giải trước, hoặc là kết hợp 2 pt thành một để thực hiện.

- Rút quan hệ x, y, thay vào pt còn lại.

- Thử lại bằng máy tính các nghiệm vừa tính toán.

Để rút được quan hệ của x, y thường có những pp sau:

- Dựa vào tính đẳng cấp của một pt trong hệ, phần này tôi cũng đã có giải thích ở phần trước.

- Dùng 5 pp đã trình bày để tìm nhân tử chung hoặc tìm ra quan hệ x, y.

- Phương pháp kết hợp 2 phương trình thành một pt mới giải được.

Riêng pp dựa vào tính đẳng cấp tôi sẽ không đề cập lại. Tôi chỉ chủ yếu đề cập đến việc vận dụng 5 pp đã nêu giải hệ . kĩ thuật kết hợp 2 pt trong hệ thành một pt giải được xem ra tôi nợ các bạn phần này, vì nó rất sâu và rộng, các bạn cố gắng tìm hiểu thêm.

1. Rút nhân tử chung

- Kĩ thuật delta chính phương

Tôi đã từng đề cập đến phương pháp này trong phần pt. Với hệ pt, ý tưởng cũng gần như tương tự. Kĩ thuật delta chính phương trong pt hầu như gắn liền với tư duy đặt ẩn phụ, riêng hệ thì không phải như vậy, vì hệ pt có 2 ẩn trên cùng một pt nên tư duy ẩn phụ là tương đối khó khăn.

Trước khi đi sâu vào pp này, tôi xin cắt nghĩa về cụm từ "delta chính phương" một chút, vì hẳn khi dùng một pp, phải hiểu pp đó nói về cái gì. Delta tức là công thức tính delta trong khi giải pt bậc 2, $\Delta = b^2 - 4ac$, từ việc tính được delta, ta có thể suy ra được nghiệm của một pt bậc 2 nào đó. Từ đây các bạn cũng có thể thấy rằng, kĩ thuật này đòi hỏi **phải đưa pt 2 ẩn về dạng 1 pt bậc 2 theo một trong 2 ẩn**, rồi tính delta, suy ra nghiệm và rút quan hệ x, y. Còn về cụm từ "chính phương", một số được gọi là chính phương khi nó có dạng bình phương của một số, do đó "delta chính phương" chính là biểu thức Δ mà ta tính được phải có dạng bình phương của 1 biểu thức, ví dụ: $\Delta = (x+1)^2$ chẳng hạn.

Để áp dụng kĩ thuật delta chính phương cần qua những bước:

- Pt đang xét đưa về được dạng pt bậc 2 theo biến x hoặc y.

- Tính delta, suy ra nghiệm của pt.

- Từ đó rút được quan hệ x, y thay vào pt còn lại

Ta xét hệ pt sau: $\begin{cases} 17(x-y) = 3xy - 2x^2 - y^2 & (1) \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{10-y} = x^2 - 7x + 11 & (2) \end{cases}$

Khi giải một hệ pt, **bước đầu tiên là nhận định, xem có thể giải được pt nào trước**. Tạm đánh số pt (1) và (2) như đã thể hiện. Ta xét pt (1), một pt đa thức không chứa căn nên sẽ dễ nhận định hơn. Thường thì loại này có 2 con đường là rút nhân tử bằng mối quan hệ suy từ máy tính Casio bấm nghiệm và sử dụng kĩ thuật delta chính phương. Với hệ số của các hạng tử chênh nhau khá nhiều nên tư tưởng ẩn phụ có vẻ khó khăn. Vì thế ta tập trung vào kĩ thuật delta chính phương.

Ta khai triển và chuyển hết pt (1) về 1 vế, ta có: $(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 3xy + 17x - 17y + y^2 = 0$. Với pt này, việc chuyển về pt bậc 2 theo x hoặc theo y đều được, tôi sẽ làm luôn 2 cách để các bạn có cách nhìn thấu đáo hơn.

C1: Rút pt bậc 2 theo x: ta có $(1) \Leftrightarrow 2x^2 + (17-3y)x + y^2 - 17y = 0$

$\Delta = (17-3y)^2 - 4.2(y^2 - 17y) = y^2 + 34y + 289 = y^2 + 2.17y + 17^2 = (y+17)^2$

Delta của ta đã biểu diễn được thành dạng bình phương nên hướng đi của ta xem như bước đầu thành công. Bằng công thức nghiệm pt bậc 2: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Ta suy ra:

$x=\frac{3y-17+y+17}{4}=y$, $x=\frac{3y-17-y-17}{4}=\frac{y-17}{2}$. Đến đây, thay vào pt thứ 2 và giải hoàn tất hệ pt này.

C2: Rút pt bậc 2 theo y: ta có $(1)\Leftrightarrow y^2-(3x+17)y+2x^2+17x=0$

$\Delta=\left[-(3x+17)\right]^2-4\left(2x^2+17x\right)=x^2+34x+289=(x+17)^2$, và một cách tương tự, suy ra: $y=2x+17$, $y=x$

Thay $x=y$ vào (2), ta có:

$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x+3}+\sqrt{10-x}=x^2-7x+11$. Pt này có 2 nghiệm đẹp nên hầu như đã vào khuôn khổ liên hiệp nhị thức rồi.

Thay $y=2x+17(*)$ vào (2), ta có

$(2)\Rightarrow\sqrt{x+3}+\sqrt{-7-2x}=x^2-7x+11$. Bấm nghiệm pt máy báo pt vô nghiệm, nên ta phải tìm lí do tại sao pt vô nghiệm.

Các bạn để ý, điều kiện của hệ pt ban đầu là $\begin{cases}y\le 10\\x\ge -3\end{cases}$, mà điều kiện của pt mới suy ra là $-7-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le -\frac{7}{2}$, vì $x\ge -3>-\frac{7}{2}$ nên xảy ra điều mâu thuẫn, pt vừa suy ra vô nghiệm. Ta kết luận hệ pt có nghiệm...

Cốt lõi của pp delta chính phương hi vọng các bạn nắm được, vì đây là pp tương đối dễ tiếp nhận. Tư tưởng "chính phương" là chủ đạo, nếu delta là một biểu thức không chính phương thì xem như pp này thất bại.

- Tìm quan hệ nghiệm bằng máy tính, kết hợp với sơ đồ Hoocne

Chức năng vượt trội của các máy tính Casio, Vinacal là không thể bàn cãi. Tuy nó không thể thay thế hoàn toàn bản chất tư duy trong toán học nhưng đã trở thành một công cụ lợi hại để tìm ra những hướng đi phù hợp cho bài toán. Quan hệ x,y trên một

pt hoàn toàn có thể tìm được bằng máy tính. Tuy nhiên để dễ dàng thì đôi khi phải "đẹp" một chút mới được.

Ta xét 1 pt có trong một hệ pt bất kì nào đó như sau:

$$x^4 - y^4 + 5x^2y + x^2 + 4xy^2 + 2xy + 10x - y^3 + y^2 + 10y = 0$$

Một pt mà hình thức của nó có thể gây "ức chế" cho một số bạn ^^. Tất nhiên là các bài toán dùng trong thi cử không tới nổi cồng kềnh như vậy đâu, nhưng với một bài toán có nhiều lời giải mà đôi khi vô tình hướng các bạn đi lại đưa đến một pt sởn óc như thế này thì cũng phải tìm cách xử lí.

Trước tiên, ta dùng máy tính nhập pt trên vào, dùng chức năng solve. Máy hỏi Y?, ta cho một giá trị Y bất kì, thường là số đẹp như 1,2,3,... chẳng hạn và solve tiếp tục. Khi cho Y=1, máy cho kết quả X=-1. Đến đây, ta phải nghi ngờ quan hệ x, y là $x = -y$ hoặc $x^2 = y$, điều này sẽ được rèn luyện trong quá trình các bạn làm bài. Do đó, để kiểm chứng kết quả, khi cho giá trị của Y và solve giá trị của X, màn hình hiện Solve for X, nên nhập giá trị X đối với Y, ví dụ nếu bạn cho giá trị Y=2, thì nên nhập vào màn hình Solve for X là -2, khi đó sẽ dễ kiểm chứng dự đoán của ta, nếu kết quả solve ra X=-2 thì xem như dự đoán của ta đã thêm một cơ sở để tin tưởng, ta làm thêm 1, 2 trường hợp nữa tương tự để khẳng định được quan hệ của x, y là $x = -y$. Còn trường hợp máy không ra kết quả như trên, thì dự đoán của ta sai và chuyển sang trường hợp $x^2 = y$, tức là khi cho Y=4 chẳng hạn, thì nên Solve for X là 2. Tóm lại, bằng hướng tiếp cận trên, ta tìm được quan hệ $x = -y$. Do đó, pt ban đầu sẽ có nhân tử chung là $(x+y)$**....** Đến đây, ta có thể **dùng sơ đồ Hoocne để tách nhân tử** cho pt ban đầu.

Ta chuyển pt thành dạng pt bậc 4 theo biến x và xem y như một tham số nào đó. Ta có pt tương đương: $x^4 + (5y+1)x^2 + (4y^2 + 2y + 10)x - y^4 - y^3 + y^2 + 10y = 0 \ (1)$

Ta lập sơ đồ Hoocne như sau:

XXX	1	0	$5y+1$	$4y^2+2y+10$	$-y^4-y^3+y^2+10y$
$-y$	1	$-y$	y^2+5y+1	$-y^3-y^2+y+10$	0

Do đó ta có thể rút nhân tử chung cho pt là:

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)\left[x^3 - yx^2 + (y^2+5y+1)x - y^3 - y^2 + y + 10\right] = 0 \ (2)$$

Trong sơ đồ trên, vì quan hệ nghiệm là $x = -y$ nên ta xem như pt có nghiệm là $-y$ và các biểu thức chứa y phía trước x là các hệ số. Qui tắc hoocne tôi cũng đã trình bày ở phần trước, các bạn xem lại nhé!

Đến đây, biểu thức trong ngoặc vuông vẫn còn dạng một đa thức, nên có thể vẫn phân tích được thành nhân tử. Ta tiếp tục tìm nhân tử cho biểu thức này. Cho Y=1, ta có X=-1, cho Y=2, ta có X=0, cho Y=3, ta có X=1. Ta thấy rằng, Y=X+2 là qui tắc chung cho các biểu thức đó, do đó biểu thức ngoặc vuông lại có nghiệm $x = y-2$. Tiếp tục với sơ đồ hoocne, ta tách được biểu thức sau:

XXXX	1	$-y$	y^2+5y+1	$-y^3-y^2+y+10$
$y-2$	1	-2	y^2+3y+5	0

Do đó $(2) \Leftrightarrow (x+y)(x-y+2)\left(x^2-2x+y^2+3y+5\right)=0$

Nếu bạn nghi ngờ ngoặc tròn cuối cùng có nghiệm, thì nên solve tiếp, nhưng ta thấy rằng nó vô nghiệm, và nếu solve thì máy cũng báo là Can't solve. Vì sao? Ta thấy rằng $x^2-2x+y^2+3y+5 = x^2-2x+1+y^2+3y+4 = (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ nên biểu thức này không thể tách được nhân tử chung tiếp, do đó pt $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=y-2 \end{array}\right.$. Đến đây coi như bước tách nhân tử cho pt của chúng ta thành công mĩ mãn ^^.

Trong nhiều sách tham khảo, các bạn có thể thấy nhiều bài tách nhân tử theo hướng này nhưng hầu như cốt lõi, tư duy nhân tử từ đầu đến cuối người ta giản lược đi. Có thể là có phương pháp tách khác hay hơn, nhưng cá nhân tôi nghĩ thì dùng Casio cộng với sơ đồ Hoocne vẫn có thể giải quyết tốt dạng toán này. Pt vừa xét được tôi trích trong sách **"Tư duy Logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình"** do **Ts. Mai Xuân Vinh** và nhóm tác giả trang web k2pi.vn biên soạn. Nguồn gốc pt này xuất phát từ phương pháp kết hợp 2 pt trong hệ và tương đối là rất khó. Riêng quyển sách này là một tài liệu về hệ pt khá hay mà tôi muốn giới thiệu với các bạn.

Phương pháp này chủ yếu dựa trên 2 bước chính, đó là tìm quan hệ x, y dựa trên máy tính Casio và tách nhân tử thông qua sơ đồ Hoocne. Riêng phần tìm quan hệ x, y theo kiểu này có một pp rất hay khác là dùng tư duy phương trình đường thẳng trong hình học Oxy. PP này cũng được trình bày trong sách tôi vừa nêu và cũng xuất hiện nhiều trên các trang mạng. Các bạn quan tâm có thể theo dõi và tiếp thu. Tôi không tiện để đề cập ở bài viết này vì bản thân vẫn chưa nắm vững pp đó lắm ^^.

- **Dấu hiện "đẳng cấp" và chuyển phương trình về dạng pt đẳng cấp**

Một pt 2 ẩn có thể rút được quan hệ x, y dễ dàng nếu nó là pt đẳng cấp. Vì vậy, trong nhiều trường hợp, ta dùng lối tư duy đó để hi vọng tìm được hướng giải quyết cho phương trình.

Tính đẳng cấp của một pt được thể hiện rất đa dạng. Ta xét một ví dụ để cho thấy điều đó:

- <u>Quan hệ biểu thức không chứa căn và căn thức chứa tích các biểu thức</u>

Ta xét hpt sau: $\begin{cases} 2y-3x-1+\sqrt{2x^2-xy-2x+y}=0 \ (1) \\ x^3-3x^2+4y-6-x\sqrt{x-1}=0 \quad (2) \end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-xy-2x+y \geq 0 \\ 3x-2y+1 \geq 0 \end{cases}$

Ta chú ý vào phương trình đầu tiên. Nếu chuyển biểu thức không chứa căn qua vế phải và bình phương lên thì thật là rối trí. Để ý thấy biểu thức trong căn có thể biểu diễn thành: $2x^2-(2+y)x+y$, nên ta hi vọng rút được nhân tử bằng pp delta chính phương, ta có: $\Delta = \left[-(2+y)\right]^2-4.2y=(y-2)^2$. Ý tưởng thành công. Ta tìm được $\left[\begin{array}{l} 2x=y \\ x=1 \end{array}\right.$ nên ta suy ra $2x^2-(2+y)x+y=(x-1)(2x-y)$. Hoặc là có thể không cần đến pp này mà bạn vẫn có thể rút được nhân tử dựa vào kinh nghiệm, đó cũng là cách hay. Nên pt (1) $\Leftrightarrow 2y-3x-1+\sqrt{(x-1)(2x-y)}=0$. Ta thấy rằng, biểu thức ngoài dấu căn có bậc 1, biểu thức trong dấu căn là tích của 2 biểu thức bậc 1, đó chính là một dạng pt đẳng cấp, nếu như ta biểu diễn được $2y-3x-1$ theo $x-1$ và $2x-y$. Việc này rất quen thuộc thôi, khi ta muốn biểu diễn một biểu thức theo một biểu thức khác, ta dùng kĩ thuật hệ số bất định, tức là ta tìm 2 số α, β sao cho đẳng thức sau được thoả mãn:

$2y-3x-1=\alpha(x-1)+\beta(2x-y)$. Đồng nhất hệ số, ta suy ra $\alpha=1, \beta=-2$ (nếu quên, các bạn xem lại một số ví dụ trước). Do đó ta viết lại pt:

$$(1) \Leftrightarrow x-1+\sqrt{(x-1)(2x-y)}-2(2x-y)=0$$

Vì điều kiện của hệ pt là $x \geq 1$ nên ta có $\sqrt{x-1}$ xác định, do đó ta có thể viết như sau: $\sqrt{(x-1)(2x-y)} = \sqrt{x-1}.\sqrt{2x-y}$. Do đó pt $\Leftrightarrow\ x-1+\sqrt{x-1}.\sqrt{2x-y}-2(2x-y)=0$.

Có một lưu ý nho nhỏ là căn thức $\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$, do đó nếu không cẩn thận, bài toán của các bạn có thể sẽ không chặt chẽ ở bước này. Pt sẽ là pt đẳng cấp nếu ta đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{2x-y} \end{cases}$,$(2x-y \geq 0)$, khi đó ta có: $a^2+ab-2b^2=0$. Dễ dàng suy ra $a=b \vee a=-2b$. Với $a=-2b \Rightarrow \sqrt{x-1} = -2\sqrt{2x-y} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

Thay vào (2) thấy thoả mãn, do đó $(x;y)=(1;2)$ là nghiệm của hệ pt. Với $a=b \Rightarrow \sqrt{x-1}=\sqrt{2x-y}\ \Leftrightarrow x-1=2x-y \Leftrightarrow y=x+1$. Thay vào (2) ta có: $(2) \Leftrightarrow x^3-3x^2+4x-2-x\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow (x-1)^3+x-1=\left(\sqrt{x-1}\right)^3+\sqrt{x-1}$. Tư duy hàm số đã lộ diện, ta giải được $x-1=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=2 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$.

Vậy hệ pt đã cho có 2 nghiệm.

Tư duy đẳng cấp xuất hiện khá nhiều trong việc tìm quan hệ x, y mà bài toán vừa nêu chỉ là một điển hình nhỏ trong lớp bài toán rất rộng này.
Bên cạnh pp đẳng cấp hoá pt 2 ẩn như vừa rồi, còn có loại đưa về dạng phương trình bậc 2 theo biểu thức nào đó, ví dụ ta chuyển pt về dạng: $(3x+y)+2\sqrt{3x+y}-3=0$ và xem đây là pt bậc 2 theo biến $\sqrt{3x+y}$. PP này tương tự nên các bạn có thể tìm hiểu hoặc suy luận thêm.

2. <u>Liên hiệp</u>

- Liên hiệp dựa vào quan hệ giữa các căn thức

Ý tưởng chung: dựa vào biểu thức dưới dấu các căn thức, ta nhẩm trừ 2 biểu thức với nhau xem có thành phần nhân tử chung với phần còn lại của pt hay không. Điều kiện là các căn thức ta liên hiệp phải **trái dấu** nhau. Ta xét một ví dụ:

$$\sqrt{x^2\left(1+y^2\right)}-\sqrt{1+x^2}=1-xy$$

Điều kiện ban đầu là 2 căn thức xuất hiện trái dấu nhau đã được thoả mãn. Ta nhẩm trừ các biểu thức dưới dấu căn của 2 căn thức. Ta có: $x^2\left(1+y^2\right)-\left(1+x^2\right)=x^2y^2-1$ $=\left(xy-1\right)\left(xy+1\right)$, đã có thành phần giống phần còn lại của pt là $xy-1$ (so với $1-xy$) nên ý tưởng của ta thành công. Một yếu tố ban đầu khi giải liên hiệp đó là chuyển tất cả pt về 1 vế, ta có pt

$$\sqrt{x^2\left(1+y^2\right)}-\sqrt{1+x^2}+xy-1=0 \Leftrightarrow \frac{\left(xy+1\right)\left(xy-1\right)}{\sqrt{x^2\left(1+y^2\right)}+\sqrt{1+x^2}}+xy-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(xy-1\right)\left[\frac{xy+1}{\sqrt{x^2\left(1+y^2\right)}+\sqrt{1+x^2}}+1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy-1=0 \\ \dfrac{xy+1}{\sqrt{x^2\left(1+y^2\right)}+\sqrt{1+x^2}}+1=0\left(*\right) \end{array}\right.$$

Bằng máy tính ta thấy rằng pt (*) vô nghiệm. Do đó ta tìm cách chứng minh. Qui đồng mẫu số, ta có $\left(*\right)\Leftrightarrow xy+1+\sqrt{x^2\left(1+y^2\right)}+\sqrt{1+x^2}=0$. Bài này cần một điều kiện ràng buộc, vì pt thứ 2 trong hệ là $\left(2x-7xy\right)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3xy}\right)=5$ nên điều kiện xác định của hệ là $x\ge\frac{2}{3}$. Do đó ta chứng minh (*) vô nghiệm $\forall x\ge\frac{2}{3}$. Ta có:

$$\left(*\right)\Leftrightarrow xy+1+x\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+x^2}=0\Leftrightarrow x\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+1+\sqrt{1+x^2}=0.$$

Vì $\sqrt{1+y^2}>\left|y\right|\ge y\Rightarrow\sqrt{1+y^2}+y>0,\forall y\in\mathbb{R}$. Do đó $x\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+1+\sqrt{1+x^2}>0$

$\Rightarrow\left(*\right)$ vô nghiệm. Do đó ta rút được quan hệ x,y của pt này là $xy-1=0$.

- Liên hiệp dựa trên quan hệ nghiệm

Xét hệ pt: $\begin{cases}\sqrt{11x^2-\left(2x-y\right)\left(x+y\right)}+2\sqrt{xy}=5x & (1)\\ \left(y^2+6x+13\right)\sqrt{4x^2+y^2-1}=\left(5y+16\right)x^2+8x+11 & (2)\end{cases}$.

Đây là một hệ tương đối khó, nhưng nó thể hiện rõ ràng hơn bản chất của pp liên hiệp. Ta xét xem pt nào nhẹ nhàng hơn và có thể giải được. Với pt thứ nhất, bằng máy tính và kĩ thuật quen thuộc, cho Y tìm X, khi Y=1 thì X=1, khi Y=2 thì X=2,... Do đó ta dự đoán pt (1) có quan hệ x,y là $x=y$ hay $x-y=0$. Kiểm chứng lại, ta thay $y=x$ vào

(1), ta có $\sqrt{11x^2-2x^2}+2x=5x$, đẳng thức này đúng và quan hệ $x=y$ mà ta dự đoán là chính xác. Bước tiếp theo là ta tìm giải pháp xử lí. Có 2 căn và quan hệ x,y khá đẹp nên ta nghĩ đến pp liên hiệp, nhưng với ví dụ trước mà ta xét, thì vd này hoàn toàn trái ngược: 2 căn thức cùng dấu nhau. Khó khăn xuất hiện, nhưng chính lúc này bản chất của liên hiệp mới được thể hiện rõ.

Từ khi tiếp cận với liên hiệp trong bài viết này, tôi luôn lưu ý với các bạn về sự " tổng bằng 0" trong việc chọn biểu thức liên hiệp. Và đây chính là chìa khoá để xử lí bài toán. Ta thấy rằng, nếu thay $x=y$ vào căn thứ nhất thì $\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}=3x$, tương tự ta có $2\sqrt{xy}=2x$, do đó để liên hiệp, ta phải làm cho từng phần liên hiệp bằng 0, tức là chuyển pt về dạng: $\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}-3x+2\sqrt{xy}-2x=0$. Ta tiến hành liên hiệp bình thường. Pt tương đương $\dfrac{11x^2-(2x-y)(x+y)-9x^2}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\dfrac{4xy-4x^2}{2\sqrt{xy}+2x}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-xy}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2(xy-x^2)}{\sqrt{xy}+x}=0 \Leftrightarrow \frac{y(y-x)}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2x(y-x)}{\sqrt{xy}+x}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left[\frac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\frac{2x}{\sqrt{xy}+y}\right]=0$$

Đến đây nhiệm vụ của ta là kiểm chứng xem ngoặc vuông có nghiệm hay không, bằng máy tính ta thấy pt này vô nghiệm. Do đó, ta tìm cách chứng minh. Ta thấy rằng, biểu thức $\dfrac{y}{\sqrt{11x^2-(2x-y)(x+y)}+3x}+\dfrac{2x}{\sqrt{xy}+y}=0(*)$ vô nghiệm khi nó >0 hoặc <0. Và mấu chốt trong những pp chứng minh vô nghiệm là dựa vào điều kiện xác định của x,y trong hệ. Điều kiện này phải chặt nên ta phải chú ý xét cho thật kĩ. Từ pt thứ (2) ta suy ra $4x^2+y^2-1\ge 0$, điều này không thể kết luận được dấu của x,y. Ta chuyển lên pt (1). Điều lưu ý là VT của pt (1) là biểu thức luôn ≥ 0 , nên để (1) có nghiệm thì $5x\ge 0\Rightarrow x\ge 0$, và lại có chứa $\sqrt{xy}$, $x\ge 0$ thì y phải ≥ 0. Nhưng mà, với $x=y=0$ thì $\sqrt{xy}+y=0$ vô nghĩa nên xem như biểu thức liên hợp của ta thất bại. Nên điều kiện $x\ge 0, y\ge 0$ là chưa chặt, điều kiện phải là $x>0, y>0$. Điều này ta sẽ dùng 1 thủ thuật nhỏ nữa. Ta xét $x=y=0$ có phải là nghiệm của hệ hay không. Thay vào ta thấy không thoả hệ. Thêm 2 trường hợp nữa là $x=0, y>0$ và $x>0, y=0$ ta xét tương tự. Do đó ta

có điều kiện $x>0, y>0$. Đến đây thì ta dễ dàng suy ra ngoặc vuông vô nghiệm. Nên pt $(1)\Leftrightarrow y-x=0\Leftrightarrow x=y$.

Qua ví dụ trên, các bạn thấy được bản chất của liên hiệp là như thế nào. Bên cạnh đó là kĩ năng "xử lí ngoặc vuông" còn lại sau khi liên hiệp. Điều này tương đối khó và thường dựa vào các đánh giá cơ bản của bất đẳng thức cũng như tính chất bình phương, và cũng quan trọng không kém là dựa vào điều kiện xác định hệ pt, các bạn phải đánh giá x, y thật kĩ để đưa đến kết quả có lợi cho bài toán mà mình đang giải.

Thay $x=y$ vào pt (2), ta có:

$$\left(x^2+6x+13\right)\sqrt{5x^2-1}=5x^3+16x^2+8x+11$$

Sẵn tiện ta phân tích luôn pt này. Một pt tương đối khó xơi. Nhẩm nghiệm ta thấy pt có nghiệm xấu, và với hình thức này thì khó đặt nhân tử chung thuần tuý được. Chuyển về một vế của pt cho dễ "kiểm soát". Ta có pt tương đương:
$5x^3+16x^2+8x+11-\left(x^2+6x+13\right)\sqrt{5x^2-1}=0(*)$. Pt chứa căn với biểu thức $5x^2-1$ và phía ngoài có $5x^3$ nên ta tách thành pt bậc 2 theo $\sqrt{5x^2-1}$, với hi vọng giải theo delta chính phương. Ta có $(*)\Leftrightarrow(x+3)\left(5x^2-1\right)-\left(x^2+6x+13\right)\sqrt{5x^2-1}+x^2+9x+14=0$. Ta có:

$\Delta=\left(x^2+6x+13\right)^2-4(x+3)\left(x^2+9x+14\right)$
$=x^4+36x^2+169+12x^3+26x^2+156x-4x^3-48x^2-164x-168$
$=x^4+8x^3+14x^2-8x+1$. Tách được chính phương không nhỉ ^^. Nếu biểu thức tách được bình phương thì sẽ có dạng $\left(x^2+\alpha x+\beta\right)^2$ nên ta sẽ dùng hệ số bất định (các bạn thấy kĩ thuật này mạnh mẽ chưa ^^), ta có

$x^4+8x^3+14x^2-8x+1=x^4+2\alpha x^3+\left(\alpha^2+2\beta\right)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$ (tôi hơi giản lược các bước tính toán).

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-1\end{cases}$ (nếu không tồn tại 2 số α,β thoả hệ thì Δ không chính phương). Do đó, $\Delta=\left(x^2+4x-1\right)^2$. Đến đây thì xem như bài toán hoàn tất.

Có một điều lạ là khi tách biểu thức đã cho dưới dạng:
$(*) \Leftrightarrow x\left(5x^2-1\right)-\left(x^2+6x+13\right)\sqrt{5x^2-1}+16x^2+9x+11=0$ thì lại không tìm được 2 số α,β thoả mãn. Các bạn tìm và suy nghĩ giúp tôi chỗ này nhé ^^.

Một hệ pt khó và phải dùng khá nhiều công cụ. Nhưng như thế để thấy được nhiều hơn những bản chất thực của những pp mà ta đã xét. Các bạn có thể thấy rằng, liên hiệp xảy ra khi các biểu thức ta trừ nhau bằng 0. Bên cạnh đó, kĩ năng phân tích delta chính phương mà ta đã xét ở phần trước lại đưa về dạng bình phương của một biểu thức bậc 2, khó hơn và... thú vị hơn. Một lần nữa thì kĩ thuật hệ số bất định được sử dụng, đó cũng có thể là những thắc mắc của các bạn khi đọc sách, tôi nghĩ là vậy.

3. Phương pháp hàm số

Ta đã xét pp này cũng như một số định dạng của nó ở phần pt. Ở phần hệ pt, pp này có thể được dùng để tìm quan hệ x,y trên một pt nào đó. **Tư duy xuyên suốt trong phần này là: ta phải tách (cô lập) x và y về hai vế của pt đang xét.**

Ta xét hệ pt sau: $\begin{cases} x^2y\left(1+\sqrt{y^2+1}\right)=2x+2\sqrt{x^2+4} & (1) \\ 2\sqrt{y^2+3}+\sqrt{4+3x^2}=4x & (2) \end{cases}$.

Để cho quen, ta tìm điều kiện xác định cho pt, vì bước này tương đối quan trọng. Ta thấy các căn thức đều >0 với mọi x,y. Nhưng pt (2) lại là dạng mà ta đã xét ở pt hệ trước. Vế trái là một biểu thức luôn dương, do các căn luôn >0 (vì bình phương mà cộng thêm một hằng số thì luôn dương). Do đó để (2) có nghiệm, tức là hệ pt có nghiệm, thì $4x>0 \Rightarrow x>0$. Vì vậy, điều kiện của hệ pt là $x>0$.

Tất nhiên, bước đầu tiên ta phải xem pt nào có thể giải được trước, ta thấy pt thứ 2 có quan hệ x,y khá xấu. Lại thấy pt (1) có thể cô lập x,y về 2 vế. Do đó, ta tập trung xử lí pt (1). Ta tìm cách cô lập, ta thấy VP toàn là x và vế trái là biểu thức chứa y có lẫn một phần tử x^2, do đó ta tìm cách khử luôn x^2 này. Để thực hiện, ta chia 2 vế pt cho x^2, nhưng trước tiên, điều kiện kiên quyết là $x\neq 0$, điều này thoả mãn vì hệ pt có điều kiện $x>0$, nên ta chia 2 vế của (1) cho x^2, ta có: $(1) \Leftrightarrow y\left(1+\sqrt{y^2+1}\right)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\sqrt{x^2+4}$.

Ta tìm một dạng hàm số thích hợp. Ta lấy một vế của pt "làm chuẩn", ví dụ ta lấy VT làm chuẩn: $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)$, ta cố gắng biểu diễn VP theo $f(t)$, ta có:

$\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\sqrt{x^2+4}=\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x}\sqrt{x^2+4}\right)=\frac{2}{x}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\right)$. Cách tách này dựa trên ý tưởng $f(t)$ nên ta trước hết rút nhân tử chung cho giống "t", sau đó biểu diễn phần còn lại trong ngoặc thành $\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)$. Đó chính là hướng tư duy khi ta đã nghi ngờ được hàm số $f(t)$, hàm này đồng biến nên ta dễ dàng suy ra $y=\frac{2}{x}$, vì $x>0\Rightarrow y>0$. Thay vào (2) ta có: $2\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}+\sqrt{4+3x^2}=4x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{4+3x^2}+x\sqrt{4+3x^2}=4x^2 \Leftrightarrow (2+x)\sqrt{4+3x^2}=4x^2$

Pt này ta nhẩm được nghiệm đẹp là $x=2$ và một nghiệm khác âm. Do đó, ta có thể bình phương 2 vế, dùng sơ đồ Hoocne cho pt bậc 4 để giải và phần ngoặc bậc 3 còn lại chứng minh nó vô nghiệm với mọi $x>0$. Cách này xem ra là tự nhiên nhất.

Điều kiện pt cho phép ta suy ra x dương nên ta thật sự tiện lợi trong quá trình giải. Do đó, một lần nữa các bạn chú ý tìm điều kiện cho biến thật chặt thì sẽ tốt hơn. Bên cạnh đó, tư tưởng hàm số cô lập các biến là điều bắt buộc trong pp hàm số giải hệ pt loại này. Có nhiều cách để cô lập. Các bạn cố gắng tìm ra chúng. Điều này không quá khó khăn khi các bạn luyện tập nhiều.

Ta xét thêm một hệ nữa, rắc rối hơn một tí:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)=8x^2y^3 & (1)\\ x^2y-x+2=0 & (2)\end{cases}$$

Ta không thể kết luận nhiều về điều kiện của hệ. Từ pt (2), ta thấy biến y bậc 1 nên bằng pp rút thế truyền thống có thể rút $y=\frac{x-2}{x^2}$, nhưng cũng chưa có nhiều lợi ích, khi thay lên (1), lại có một pt tương đối lằng nhằng. Với tư tưởng hàm số, ta xét pt (1). Một hình thức pt tương đối quen thuộc và giống giống hệ pt vừa xét. Ý tưởng chủ đạo vẫn là phải cô lập được 2 biến x,y. Ta thấy rằng, nếu chia 2 vế cho nhân tử $\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)x^2$, thì VP sẽ toàn biến y, ta có $(1)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+1}+2}{x^2}-3y=\frac{8y^3}{\sqrt{4y^2+1}+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+1}+2}{x^2}=\dfrac{8y^3}{\sqrt{4y^2+1}+1}+3y\left(*\right)$. Bước cô lập xem như hoàn tất, nhưng một biểu thức quá xấu không gợi lên một hàm số nào hết. Phân tích tiếp. Ta thấy rằng, VT căn thức nằm trên tử, do đó, để "đối xứng" thì căn thức VP cũng phải nằm trên tử. Để làm được điều này, ta thực hiện trục căn thức ở mẫu, một kiến thức đã học ở lớp 9, nói đâu xa, đó là kĩ năng liên hiệp thôi. Và kĩ thuật này rất hay dùng trong những bài toán sử dụng hàm số. Ta có $\dfrac{8y^3}{\sqrt{4y^2+1}+1}+3y=\dfrac{8y^3\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)}{4y^2}-3y=2y\sqrt{4y^2+1}+y$. Do đó ta có:

$\left(*\right)\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+1}+2}{x^2}=2y\sqrt{4y^2+1}+y\ \ \left(3\right)$. Đến đây, từ hình thức của biểu thức ở VP ta suy nghĩ đến dạng hàm số $f\left(t\right)=t\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t}{2}$. Ta tìm cách phân tích $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2}{x^2}$ theo $f\left(t\right)$. Ta có: $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2}{x^2}=\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\dfrac{2}{x^2}$, không đảm bảo được dạng của $f\left(t\right)$, vì nếu theo dạng $f\left(t\right)$ thì không phải $\dfrac{2}{x^2}$ mà phải là $\dfrac{1}{2x}$ mới hợp lí. Do đó cách tách của ta chưa hợp lí. Vấn đề của ta nằm ở con số 2, nên ta chú ý vào nó nhiều hơn. Lại thấy pt (2) ta có thể rút được $2=x-x^2y$ nên ta thay vào pt, ta có:

$\left(3\right)\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-x^2y}{x^2}=2y\sqrt{4y^2+1}+y\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2}=2y\sqrt{4y^2+1}+2y$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\dfrac{1}{x}=2y\sqrt{4y^2+1}+2y$. Cách tách này cho ta dạng hàm số $f\left(t\right)=t\sqrt{t^2+1}+t$, hàm số này đồng biến nên xem như thành công.

Tuy nhiên, nếu trình bày như vậy thì bài toán của ta **sẽ không có điểm nào**, lí do là có một vài chỗ không chặt chẽ. Thứ nhất, khi chia 2 vế của pt cho $\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)x^2$ trong khi biểu thức đó chưa $\neq 0$ là sai. Thứ hai, phép liên hiệp rút căn thức ở mẫu sau:

$\dfrac{8y^3}{\sqrt{4y^2+1}+1}=\dfrac{8y^3\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)}{\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right)\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)}=2y\left(\sqrt{4y^2+1}-1\right)$ nói chung chưa chặt chẽ,

khi biểu thức nhân vào vẫn chưa $\neq 0$ với mọi y, hay nói cách khác, phép tính trên chỉ đúng khi $y \neq 0$. Thứ ba, biểu thức $\frac{\sqrt{x^2+1}+2}{x^2} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + \frac{2}{x^2}$ không đúng với mọi x vì khi $x > 0$ thì mới đưa $\frac{1}{x}$ vào trong căn được. Đó là 3 vấn đề có thể bạn sẽ bỏ qua, nhưng là những lỗi sai mà không thể cho điểm được. Nói tóm lại, từ 3 vấn đề trên, ta phải chỉ ra được: $x > 0$ và $y \neq 0$ hoặc $x > 0$ và $y > 0$. Điều này cần một chút ở kinh nghiệm giải bài của các bạn. Xét pt (1): $\left(\sqrt{x^2+1} - 3x^2y + 2\right)\left(\sqrt{4y^2+1}+1\right) = 8x^2y^3$ ta thấy, với $y \leq 0$ thì $-3x^2y \geq 0$, do đó $\sqrt{x^2+1} - 3x^2y + 2 > 0$ và $\sqrt{4y^2+1}+1 > 0$ suy ra VT **lớn hẳn** hơn 0, trong khi đó VP $= 8x^2y^3 \leq 0$. Do đó pt vô nghiệm với $y \leq 0$. Suy ra điều kiện của pt là $y > 0$. Ta giải quyết được một vướng mắt. Tiếp theo, ta tìm điều kiện để $x > 0$. Từ pt (2), ta có $\frac{x-2}{x^2} = y > 0 \Rightarrow x > 2$, càng tốt. Tới đây, coi như bài toán hoàn tất khi ta đã giải quyết tất cả các rào cản trước khi xét hàm số. Bước thế vào (2) thì tương đối đơn giản rồi.

Một bài toán khó đòi hỏi cộng gộp giữa kĩ năng định hướng và giải quyết những vấn đề phát sinh. Đây không phải là một kĩ năng dễ. Do đó hi vọng các bạn có quĩ thời gian nhất định để rèn luyện thêm nhiều bài toán khác nhau, có cái nhìn sâu hơn nữa. Kĩ năng liên hiệp đưa về dạng pt đẹp hơn cũng là một chú ý quan trọng của hệ pt trên. Ngoài ra, ta còn có một vài chú ý nho nhỏ khác.

4. Một số công cụ bổ trợ trong quá trình rút quan hệ x, y

- Liên hiệp đưa về dạng hàm số:

Xét pt: $3xy\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$. Cô lập về hai vế của pt, ta có:

$3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right) = \frac{1}{x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}$. Vì căn thức ở VP ở tử số nên căn ở VP cũng nên như vậy. Để làm điều này, ta dùng liên hiệp: $3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$

$\Leftrightarrow 3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow 3y\left(1+\sqrt{9y^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)$. Xong!

- "Chuyển cộng thành trừ"

Đây hầu như chỉ là một mẹo nhỏ, dựa trên tư tưởng đơn giản nhưng không đơn giản ^^ là: $x^2 = (-x)^2$, dùng mẹo này để chuyển về dạng hàm số thích hợp hơn. Ta xét pt:

$$\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{4x^2+1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{4x^2+1}=\frac{\sqrt{y^2+1}-y}{\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)} \Leftrightarrow 2x+\sqrt{4x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}$$

$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{4x^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}$. Xét hàm số trên $\mathbb{R}$ nữa là xong.

Có thể bạn sẽ thắc mắc tại sao lại liên hiệp với $\sqrt{y^2+1}-y$ mà không phải là $y-\sqrt{y^2+1}$ cho thuận. Lí do là để sau khi liên hiệp xét dấu dễ dàng hơn. Ta có: $\sqrt{y^2+1}>\sqrt{y^2}=|y|\ge y \Rightarrow \sqrt{y^2+1}-y>0$, do đó không phải lo sợ trường hợp nó âm hay bằng 0 gây khó xử nữa.

- Tìm điều kiện xác định cho x, y dựa vào biểu thức Δ của pt bậc hai

Các bạn đã biết rằng, một pt bậc 2 có nghiệm khi $\Delta \ge 0$. Từ biểu thức này, ta có thể tìm được ĐKXĐ cho x, y. Cụ thể, ta xét pt sau:

$$x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0$$

Ta xem như pt đã cho là pt bậc 2 theo x nên ghép pt : $x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0$.

Pt này có biểu thức delta: $\Delta=(y-7)^2-4\left(y^2-6y+14\right)=-3y^2+10y-7$. Để pt có nghiệm, tức là có quan hệ x, y thì $\Delta\ge 0 \Rightarrow -3y^2+10y-7\ge 0 \Leftrightarrow 1\le y\le \frac{7}{3}$. Tương tự, để tìm điều kiện cho x, ta xét pt bậc 2 theo y, làm tương tự. PP này bổ trợ khá đắc lực trong việc chứng minh đạo hàm của hàm đại diện đơn điệu. Ví dụ, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \\ \left(2x^2-3x+4\right)\left(2y^2-3y+4\right)=18 \end{cases}$$

Thông qua xét hệ pt này, tôi đề cập luôn một dạng khác khá hay của hàm số, đó là đánh giá giá trị hàm số tại biên, tạm gọi vậy. Cơ sở là tìm min, max của hàm số bằng pp đạo hàm, khi ta có linh cảm các giá trị cực trị của hàm số trùng với giá trị của pt. Với bài toán này, khi dùng delta như trên, ta suy ra ĐKXĐ là: $1 \le y \le \frac{7}{3}, 2 \le x \le \frac{10}{3}$. Do đó xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ trên $\left[1; \frac{7}{3}\right]$, ta có $f'(x) = 4x - 3 > 0, \forall x \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\left[1; \frac{7}{3}\right]$, nên $f(1) \le f(x) \le f\left(\frac{7}{3}\right) \Rightarrow f(x) \ge 3$. Một cách tương tự, ta xét hàm số $f(y) = 2y^2 - 3y + 4$ trên $\left[2; \frac{10}{3}\right]$ cũng suy ra được $f(y) \ge f(2) = 6$. Do đó, ta có $f(x).f(y) \ge 18$. Yêu cầu bài toán suy ra $x = 1, y = 2$. Về mặt lí thuyết thì hàm số đã xét không đơn điệu trên toàn $\mathbb{R}$ nên bước chặn giá trị x, y như vậy làm ta dễ dàng hơn trong việc xét hàm số và đánh giá.

Riêng các phương pháp ẩn phụ và đánh giá thì tôi xin dành cho các bạn, vì loại này thường không có những điển hình cụ thể mà biến đổi theo từng dạng hệ pt nên đòi hỏi các bạn phải tư duy.

Đặt ẩn phụ có tư duy chủ yếu là gom những thành phần giống nhau, sau đó đặt ẩn mới cho gọn nhẹ hoặc chuyển hệ đã cho thành hệ đối xứng, hệ giải được bằng pp nhân tử chung, hàm số,...

Đánh giá với nền tảng là sử dụng các bất đẳng thức cơ bản, sử dụng đạo hàm là chính. Dấu hiệu của chúng là khi ta chuyển về một vế của pt thì với mọi x, y thuộc miền xác định, ta luôn thấy biểu thức luôn ≥ 0 hoặc ≤ 0. Do đó, trường hợp xảy ra dấu "=" của bất đẳng thức ta đánh giá chính là quan hệ x, y hoặc là nghiệm của hệ pt.

Phương pháp kết hợp 2 pt trong hệ cũng là một dạng rất rộng và khó. Nên e là trong phạm vi ngắn ngủi của một bài viết không thể lộ tả hết bản chất cũng như dấu hiệu cho các bạn được. Nếu các bạn quan tâm có thể tìm đọc sách mà tôi đã giới thiệu ở phần trước hoặc cách loại sách khác có đề cập. Định hướng và nền tảng kiến thức được trình bày hết sức rõ ràng, và tất nhiên là phải trải qua quá trình rèn luyện và trải nghiệm nữa thì mới thấu hết được phương pháp cũng như những biến dạng của nó.

Bài viết của tôi tạm thời dừng lại tại đây. Nếu có thêm thời gian, tôi sẽ tiếp tục với chủ đề về bất đẳng thức và bài toán min max. Một số, chỉ là một số thôi những kiến thức mà tôi thu nhặt được trong quá trình học, vì tôi cũng là một người khá yếu về phần

này. Bên cạnh đó, có thể tôi sẽ đề cập thêm một phần về những dạng bài tập nâng cao có liên quan đến kiến thức đạo hàm, dãy số,... Đó là chuyện của tương lai. Xin mạo muội được kết thúc tại đây. Trong quá trình biên soạn luôn chất chứa những thiếu sót, hi vọng các bạn bỏ qua và có thể đóng góp, trao đổi thêm về những kinh nghiệm của các bạn với tôi. Nếu thời gian cho phép tôi sẽ cùng trao đổi và tiếp thu những phần mình còn thiếu sót. Thân ái! ^^